



ESCUELA
POLITÉCNICA
NACIONAL

XIV

Encuentro
de Matemática
y sus Aplicaciones

1 al 5 de septiembre de 2014

Quito, Ecuador



MEMORIAS

www.math.epn.edu.ec/xivencuentro



ESCUELA
POLITÉCNICA
NACIONAL



MEMORIAS

**Encuentro
de Matemática
y sus Aplicaciones**

**1 al 5 de septiembre de 2014
Quito, Ecuador**

XIV ENCUENTRO DE MATEMÁTICA Y SUS APLICACIONES

CONTENIDOS

1

Presentación

5

Alejandro Araujo G.

Introducción a la programación en R

31

Rafael Burbano R.

Curso introductorio al Análisis Multicriterio

65

Marco Calahorrano R.

Ecuaciones en Derivadas Parciales

107

Juan Carlos Trujillo

*Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje y la enseñanza de la
Matemática*

131

Resúmenes de las ponencias

AGRADECIMIENTOS Y BIENVENIDA

El Encuentro de Matemática y sus Aplicaciones es un evento bienal que se ha venido organizado en el Departamento de Matemática de la Facultad de Ciencias de la Escuela Politécnica Nacional desde hace 28 años, para promover el importante papel de la investigación matemática. Consideramos necesario crear espacios para la divulgación y discusión científica de trabajos finalizados y en desarrollo, realizados en nuestro y otros países; por lo que el objetivo de este encuentro es difundir los resultados recientes en cualquiera de las ramas de la Matemática, ya sea pura o aplicada, a través de la participación conjunta de expertos, estudiantes e interesados profesionalmente en la misma y así impulsar la vinculación entre las personas e instituciones participantes.

Este libro de memorias incluye, además de los resúmenes de trabajos presentados en español e inglés, el material de apoyo para los cursos tutoriales desarrollados de manera colateral a las ponencias del evento. La pertinencia y la calidad de todos los trabajos fue asegurada por el Comité Científico conformado por los profesores Marco Calahorrano, Holger Capa, Juan Carlos de los Reyes, Luis Miguel Torres y Polo Vaca, todos ellos docentes e investigadores de gran trayectoria del Departamento de Matemática de la Escuela Politécnica Nacional.

En esta decimocuarta edición se han dado cita investigadores del más alto perfil académico de nuestro país y de otros países de Latinoamérica y Europa, a quienes queremos presentar nuestro más sincero agradecimiento, de manera especial, a la profesora y profesores Gabriela Corsano, Salvador Naya, Juan Ignacio Pastore, Frits Spieksma, Rolando Rebolledo, Juan Tirao, Bernard Vallette y Vincenzo Vespri, por haber aceptado la invitación como conferencistas plenarios.

También queremos resaltar y presentar nuestro reconocimiento a la participación de los profesores Sergio González, Juan Mayorga, Pedro Merino, Diego Recalde y Ramiro Torres, como conferencistas semiplenarios, al igual que a todos los conferencistas que han aportado con sus ponencias.

Deseamos expresar nuestra gratitud a todos los colegas y colaboradores: al Comité Científico, al Comité Organizador, conformado por los profesores Diego Recalde, Fernanda Salazar, Ramiro Torres y Juan Carlos Trujillo, quienes han sido el motor principal para la realización de este evento; a los profesores que han aportado en el evento impartiendo cursos tutoriales: Alejandro Araujo, Rafael Burbano, Marco Calahorrano, Pedro Merino y Juan Carlos Trujillo. Al Rector de la Escuela Politécnica Nacional, Ing. Jaime Calderón, al Lic. César Herrera, director de Relaciones Insti-

tucionales de la EPN, al Jefe del Departamento de Matemática, Dr. Luis Horna, al apoyo del personal administrativo del Departamento de Matemática (Gisela Coronel y Julio Erazo), a los estudiantes Stephany Vargas y Jonathan Quirola de la Unidad de Publicaciones y a todas las personas que han aportado de una u otra manera para que este evento sea posible.

Además, es necesario resaltar el aporte realizado por nuestros co-organizadores y auspiciantes: La Sociedad Ecuatoriana de Matemática (SedEM), el Centro de Modelización Matemática (ModeMat), la Empresa Pública Yachay, Ciudad del Conocimiento, la Universidad Andina Simón bolívar(UASB), la Asociación de Fútbol No Amateur de Pichincha (AFNA) y el Centro de Investigaciones Matemáticas Aplicadas a la Ciencia y tecnología (Cimacyt). Dejamos constancia de que su impulso ha sido extremadamente valioso para este evento.

Finalmente, queremos presentar nuestra bienvenida y saludo caluroso a todos los participantes, quienes conforman el material humano imprescindible para que este evento sea posible. Esperamos que su participación en el XIV Encuentro de Matemática y sus Aplicaciones sea fructífera y esperamos volver a re-encontrarnos en futuras ediciones del evento.

Sandra Gutiérrez

Coordinadora General del XIV Encuentro de Matemática y sus Aplicaciones

CURSOS TUTORIALES

Introducción a la programación en R

Alejandro Araujo*

Julio 2014

Resumen

El curso está enfocado a introducir las estructuras básicas de la programación en el lenguaje R, lo que permitirá a los participantes ampliar la gama de aplicaciones. Previamente se hará una descripción detallada del programa R. Además se abordarán con detalle las estructuras para manejar datos y la definición de funciones construidas por el usuario. Finalmente, se abordarán los dispositivos gráficos de R.

1 Fundamentos

1.1 Descripción del programa R

R es un lenguaje y entorno de programación, creado en 1993 por Ross Ihaka y Robert Gentleman, cuya característica principal es que forma un entorno de análisis estadístico con lenguaje de programación para realizar cálculos y crear gráficos.

En su aspecto, R puede considerarse como otra implementación del lenguaje de programación S, con la particularidad de ser un software de uso libre.

En la página web del proyecto R se puede conseguir gratuitamente el programa en su última versión, o cualquiera de las anteriores, además de manuales, librerías (packages) y demás elementos que conforman entorno de programación denominado R.

Rproporciona una ruta de código abierto para la contribución al proyecto, creando modificaciones de datos, funciones y librerías (packages).

1.2 Características del programa R

Ningún otro programa en la actualidad reúne las condiciones de recursos y manejabilidad que posee R; además, en los últimos años ha tenido una mayor implantación en la comunidad científica.

Entre otras características dispone de:

- Almacenamiento y manipulación de datos.

*Departamento de Matemática de la Escuela Politécnica Nacional

- Operadores para cálculo con variables indexadas o arreglos (arrays), y en particular con matrices.
- Herramientas para análisis de datos.
- Posibilidades gráficas para análisis de datos.

Junto con R se incluyen ocho bibliotecas o paquetes (llamadas bibliotecas estándar), pero otros muchos están disponibles a través de Internet en (<http://www.r-project.org>).

Actualmente se encuentran disponibles 2 337 librerías (packages) desarrollados en R, que cubren multitud de aplicaciones en diversos campos.

Una vez instalado el programa, la forma más fácil de usarlo es de forma interactiva mediante la línea de comandos. Cuando R se inicia, aparece la ventana del programa “Gui” (Graphical User Interface) con un mensaje de apertura.

1.3 El editor de comandos (“prompt”)

Debajo del mensaje de apertura de la consola de R, se encuentra el “prompt” que es el símbolo “>” (mayor que). Las expresiones en R se escriben directamente a continuación del “prompt” en la consola de R.

Si se escribe e intenta ejecutar un comando que se ha escrito en forma incompleta, el programa presenta un “+”, que es el prompt de continuación.

Una característica de R es que nos permite guardar la sesión de trabajo, lo que será muy útil en el caso de que necesitemos utilizar bibliotecas o datos que ya hemos implementado.

Al cerrar el programa o al teclear “q()”, nos preguntará si desea salvar los datos de esta sesión de trabajo. Puede responder: yes (sí), o no (no) o cancel (cancelar) pulsando respectivamente las letras *y*, *n* o *c*.

En cada caso respectivamente: salvará los datos antes de terminar, o terminará sin salvar, o volverá a la sesión de R. Los datos que se salvan estarán disponibles en la siguiente sesión de R.

Es importante saber que el nombre de un objeto debe comenzar con una letra (A hasta Z, o, a hasta z) y puede además incluir letras, dígitos (0-9) o puntos (.).

R discrimina entre letras mayúsculas y minúsculas para el nombre de un objeto, de tal manera que *x* y *X* se refieren a objetos diferentes.

1.4 Función help (ayuda)

R es un lenguaje funcional, esto es, realiza las tareas a través de funciones. La primera función que necesitamos conocer es la que nos proporciona la ayuda del programa, esta es “help”.

Si escribimos “help”, aparece la definición de la función “help”, la cual nos será útil conocer si queremos realizar alguna modificación en ella.

Pero si lo que queremos es obtener el resultado de la función, debemos escribir entre paréntesis el conjunto de argumentos que quiere suministrar a la misma, o vacío si lo que se quiere es que aparezca la ayuda sin más. Por ejemplo:

```
> help(mean)
```

Una forma alternativa a esta función es poner el caracter “?” delante del elemento que queremos consultar; o también con la función: “help.search”. Por ejemplo:

```
> help.search("calibration")
```

1.5 Asignaciones

Al igual que ocurre con otros lenguajes de programación, R asigna nombres a los diversos objetos (tales como variables o resultados de operaciones). Esto se consigue mediante el símbolo: “<-”; “->”; o, “=”.

Hay que tener en cuenta que R utiliza determinados términos para referirse a algunas funciones por lo que lo mejor es evitar esos nombres a la hora de las asignaciones.

Por ejemplo, “c” se utiliza para crear vectores o “t” para calcular la traspuesta de un arreglo de datos (vectores, matrices, dataframe, ...), pero si nos confundimos, no es dramático, ya que podemos arreglarlo.

Las siguientes instrucciones generan dos vectores (x y X, de orden 6 y 5 respectivamente) usando la función `rnorm` que genera números aleatorios (con distribución `Normal(0,1)`), y también se crea un vector y, cuyas componentes son los enteros desde uno hasta quince.

```
> rnorm(6) ->x
> x
[1] 0.1364489 -0.5514473 0.2333607 1.1652428 0.4284878
    0.5159063
> X<- rnorm(5)
> X
[1] -0.482520557 -0.951955735 1.537756423 0.839669367
    0.772915316
> y<-1:15
>y
[1] 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15
```

En el caso que necesitemos poner comentarios en R, estos se realizan poniendo delante del comentario el símbolo “#”.

Recuerde la importancia de estos para explicar lo que se está haciendo o simplemente para recordar que realiza el programa o la función que hemos implementado.

```
> # Programa realizado en R para simular el fondo de
    inversiones
> # Las siguientes instrucciones permiten crear un vector de
    8 números aleatorios entre 0 y 1 con distribución uniforme
>runif(8,0,1)
```

1.6 Paquetes

Como ya se ha dicho, R consta de un sistema base de librerías y de un conjunto de paquetes adicionales que extienden su funcionalidad. En esta sección vamos a ver como se anexan (instalan) los paquetes adicionales.

Tenemos que tener en cuenta que la instalación depende del sistema operativo del computador; hay varias formas de instalar un paquete. El método más sencillo consiste en hacerlo directamente desde R, mediante la función:

```
> install.packages( ).
```

Desde una ventana del sistema o desde Inicio-Ejecutar ... Rcmd INSTALL paquete.

Después de haber instalado la librería en el programa, para poder utilizarla debemos descargar el paquete. La forma más común de hacerlo es desde el menú Paquetes ¿cargar paquete ...; entonces aparecerá una lista con todos las librerías instaladas y nos pedirá que instalemos una de ellas; simplemente seleccionando una, la tendremos operativa.

1.7 Módulo R-Commander (paquete Rcmdr)

R cuenta con entornos amigables para los usuarios, por ejemplo, el módulo de nombre R-Commander (paquete Rcmdr) que es una interfaz gráfica que se compone de una ventana que contiene varios menús, botones y campos de información.

Por defecto R-Commander consiste en una barra de menús, una barra de herramientas, una ventana de instrucciones, una ventana de salida y una ventana de mensajes.

Las instrucciones para leer, escribir, transformar y analizar datos se ejecutan usando la barra de menú de la parte superior de la ventana de R-Commander.

La mayor parte de los ítems de este menú le guiarán mediante ventanas de diálogo, preguntando más allá de la especificación.

Bajo la barra de menú, se encuentra la barra de herramientas con un campo de información que muestra el nombre del conjunto de datos activos, botones para editar y mostrar el conjunto de datos activos y un campo de información mostrando el modelo estadístico activo.

Bajo la ventana de instrucciones hay un botón Ejecutar para realizar las órdenes indicadas en la ventana de instrucciones.

Los campos de información para los datos y el modelo activo, son botones que pueden ser usados para seleccionar éstos, respectivamente, entre conjuntos de datos o modelos disponibles en memoria.

Por defecto, las órdenes son registradas en la ventana de instrucciones (la ventana de texto ubicada inmediatamente después de la barra de herramientas); las órdenes y las salidas aparecen en la ventana de resultados (la ventana de texto ubicada después de la ventana de instrucciones).

Si el registro de instrucciones está activo, las órdenes de R editadas o introducidas desde los menús y los cuadros de diálogos, son alojadas en la ventana de instrucciones de R-Commander.

Se pueden editar estas órdenes de manera normal y se pueden escribir otras nuevas en la ventana de instrucciones. Las órdenes individuales pueden ser continuadas en más de una línea.

El contenido de la ventana de instrucciones puede ser almacenado durante o al final de la sesión y un conjunto de instrucciones guardado puede ser cargado en la ventana de instrucciones.

El contenido de la ventana de resultados puede ser editado o guardado en un archivo de texto.

Para volver a efectuar una orden o un conjunto de ellas, se seleccionan las líneas que se desean ejecutar usando el ratón (mouse) y se presiona el botón Ejecutar, situado a la derecha de la barra de herramientas (o Control-R); este procedimiento sirve para realizar (correr) el bloque de las instrucciones elegidas.

Si no hay texto seleccionado el botón Ejecutar (o Control-R) envía el contenido de la línea que contiene el cursor de inserción.

En la última ventana (situada abajo) se generará información, se presentan los errores si una orden o algunas órdenes enviadas son incompletas.

Para instalar R-Commander hay que cargar el paquete "Rcmdr".

Al cargar el paquete R-Commander también se instalan muchos otros paquetes (dependencias) que son necesarios para que puedan funcionar todas las opciones de los menús del entorno gráfico.

Cada vez que se quiera abrir R-Commander hay que teclear `library(Rcmdr)` en la consola de comandos, o entrar en el menú Paquetes-¿Cargar paquete... y seleccionar Rcmdr en la ventana que aparece.

1.8 Editor de archivos Tinn-R

Tinn-R es un editor de archivos que mejora al bloc de notas de Windows, ya que contiene características que permiten el uso de sintaxis de R; también proporciona un menú y una barra de herramientas adicional que se comunica y llama al R-Gui, lo que permite ejecutar el código en el mismo programa.

Existen más entornos gráficos útiles, a semejanza de los anteriores, cada uno con sus ventajas e inconvenientes; algunos de ellos son:

- JGR o Java GUI for R, que es una multiplataforma basada en Java;
- RExcel, que permite usar R y Rcmdr desde Microsoft Excel;
- Rggobi; Sage; Statistical Lab; NexusBPM; RWorkBench; etcétera.

1.9 Función library

La función `library` gestiona los libros de la biblioteca, dando información sobre los existentes y cargándolos en memoria o descargándolos de la misma.

Un libro está formado por funciones, datos y documentación; todos ellos contenidos en un directorio que contiene varios subdirectorios, con informaciones diversas, de acuerdo con un formato establecido.

De hecho, al instalar R, se carga al menos un primer libro denominado "base".

Por ejemplo `library()` devuelve la lista de los libros que hay en la biblioteca predeterminada de R, con una breve descripción a su lado derecho.

```
> library()
```

La instrucción `library(help="base")` devuelve una pequeña ayuda sobre el libro base.

```
># Para cargar un libro , por ejemplo el paquete "prob", damos  
la instrucción:
```

```
> library(prob)
```

Usando la instrucción `search` se presentan todos los paquetes cargados:

```
> search()
```

```
[1] ".GlobalEnv" "package:prob" "package:stats" "package:  
graphics"
```

```
[5] "package:grDevices" "package:utils" "package:datasets"
```

```
[8] "package:methods" "Autoloads" "package:base"
```

```
># Se puede ver la información del paquete "prob", mediante  
la instrucción:
```

```
> library(help=prob)
```

1.10 Operaciones con números reales y complejos

R es un lenguaje interpretado, es decir, podemos escribir órdenes y R las ejecutará inmediatamente.

De hecho, puede utilizar R como una calculadora, ya que es capaz de manejar todas las operaciones elementales: suma, resta, multiplicación, división y potenciación, que se realizan mediante los símbolos: `+`, `-`, `*`, `^`.

```
> # R como calculadora
```

```
> 2+3
```

```
[1] 5
```

```
> 7*3
```

```
[1] 21
```

Es importante saber que R no evalúa una expresión hasta que tiene la certeza de que se ha terminado su escritura; por ejemplo, si la expresión comienza con un paréntesis, se debe cerrar la expresión con otro paréntesis, sino R considerará que no terminó la acción, sucede de manera similar con corchetes, llaves, etcétera. En general, para cualquier función, su escritura sin los paréntesis indica al lenguaje que debe devolver la definición, en tanto que al incluir paréntesis, le indica que intente ejecutarla.

```
> 15/3
```

```
[1] 5
```

```
> 15/4
```

```
[1] 3.75
```



```
> 3^4
[1] 81
```

También podemos hacer los mismos cálculos con números complejos, en este caso utilizaremos como es usual, la letra “i” para referirnos a la unidad imaginaria ($1i \cdot 1i = -1$) que debe ir acompañado siempre del coeficiente (parte imaginaria del número).

```
> (3+3i)+(-3+2i)
[1] 0+5i
> (2+2i)*(3+i)
Error: objeto 'i' no encontrado
> (2+2i)*(3+1i)
[1] 4+8i
> (2+2i)/(3+1i)
[1] 0.8+0.4i
```

1.11 Funciones usuales

R proporciona las funciones usuales para hacer todo tipo de evaluaciones básicas, tales como: suma, raíz cuadrada, valor absoluto, senos, cosenos, logaritmo natural, exponencial, ...:

- **sum()**: Suma de los elementos
- **sqrt()**: Raíz cuadrada.
- **abs()**: Valor absoluto.
- **sin()**, **cos()**, ...: Funciones trigonométricas.
- **log()**, **exp()**: Logaritmo y exponencial.
- **round()**: Redondeo de valores numéricos.

```
># A continuación se presentan ejemplos del uso de algunas
   funciones usuales.
> sqrt(81)
[1] 9
> abs(-7)
[1] 7
> sin(-2*pi)
[1] 2.449213e-16
> log(100)
[1] 4.6052
```

1.12 Operadores Comparativos y Lógicos

Los operadores comparativos y lógicos son muy importantes a la hora de programar funciones, ya que gracias a ellos se puede hacer distinciones de datos, agrupaciones, etcétera. Se presenta a continuación una pequeña introducción a ellos.

Los operadores comparativos o de relación interaccionan sobre cualquier tipo de elemento devolviendo uno o varios valores lógicos. Siempre necesitan dos elementos ($a < b$) para poder comparar.

Los operadores lógicos pueden actuar sobre uno o dos objetos de tipo lógico, y pueden devolver uno (o varios) valores lógicos.

1.12.1 Operadores de Relación

Símbolo	Relación
<	Menor que
>	Mayor que
<=	Menor o igual que
>=	Mayor o igual que
==	Igual
!=	Diferente

1.12.2 Operadores Lógicos

Símbolo	Lógicos
!x	negación
x &y	Conjunción (\wedge)
x&&y	Igual
x y	Disyunción (\vee)
x y	Igual

Para comparar “totalmente” dos objetos, se requiere usar la función “identical”.

```
> # A continuación se asigna a x el valor 10
> x<-10
> # Ahora se pregunta si x es menor que 5
> x<5
[1] FALSE
> # La siguiente instrucción pregunta si x es mayor o igual
  que 5
> x>=5
[1] TRUE
> # Se pregunta si el valor de x es igual a 5
> x==5
[1] FALSE
> # A continuación se pregunta si x es distinto de 5
> x!=5
[1] TRUE
```

```

> # Ahora se crean dos vectores
> u<-1:3
> v<-3:1
> # La siguiente instrucción pregunta si los dos vectores son
    iguales
> identical(u,v)
[1] FALSE
> # Veamos los elementos que coinciden
> u==v
[1] FALSE TRUE FALSE

```

2 Utilización de datos

2.1 Generación de vectores

El primer tipo de objeto que manejaremos es el vector (arreglo de elementos del mismo tipo).

Utilizando la opción ":" (que su ubica entre dos números a:b) se genera un vector que comienza en el primer número suministrado (el que está a la izquierda) y finaliza en el segundo número dado, o en un número anterior sin sobrepasarlo (al que está en la derecha), y de manera que entre una componente y la siguiente haya una diferencia de uno; por tanto, las componentes crecen si a es menor que b, y decrecen en el caso contrario.

```

># Ejemplos de generación de vectores
> 1:10
[1] 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
> 10:1
[1] 10 9 8 7 6 5 4 3 2 1
> 1.5:7.5
[1] 1.5 2.5 3.5 4.5 5.5 6.5 7.5

```

En general un vector se crea mediante la función de concatenación "c()". Por ejemplo:

```

> c(1,2,4,3)
[1] 1 2 4 3
> c(1:5)
[1] 1 2 3 4 5
> c(1:5,-2,4,-3)
[1] 1 2 3 4 5 -2 4 -3

```

Hay también otras formas de generar vectores; una de las más comunes es usando la función "seq(a,b,c)", que genera secuencias de números reales, donde la primera componente indicará el principio de la secuencia, la segunda el final y la tercera el incremento que se debe usar para generar la secuencia. Aunque también se puede poner la función en estas formas:

- `seq(length = d; from = a; to = b)`
- `seq(by = c; from = a; to = b)`, siendo “d” la longitud del vector.

```
> seq(1,10,2)
[1] 1 3 5 7 9
> seq(from = 1, to = 20, by =2)
[1] 1 3 5 7 9 11 13 15 17 19
> seq(1,10,2)
[1] 1 3 5 7 9
># Vector secuencia de 1 a 10 con increment de 2
> seq(from = 1, to = 10, by =2)
[1] 1 3 5 7 9
> # Si lo que queremos es 6 componentes
> seq(from = 1, to = 10, length =6)
[1] 1.0 2.8 4.6 6.4 8.2 10.0
> # Con el argumento along creamos un vector con los índices
  del vector argumento que llamemos (o consideremos en la
  función)
> x<-c(1,2,1,3,4)
> seq(along=x)
[1] 1 2 3 4 5
```

La función “`rep(a; b)`”, que crea un vector con “b” componentes idénticos al valor “a”.

```
> # A continuación , se crea el vector de diez (10)
  componentes iguales a tres (3) .
> rep(3,10)
[1] 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3
> # repetimos el vector "a" 2 veces; por ejemplo , si a
  =(1,2,3,4,5).
> a=1:5
> rep(a,2)
[1] 1 2 3 4 5 1 2 3 4 5
```

2.2 Tipos de vectores

Un vector siempre está formado por elementos del mismo tipo, no pueden mezclarse números y cadenas de caracteres (se transformará en cadenas de caracteres).

```
> c("Hola" , "Adios")
[1] "Hola" "Adios"
```

Del mismo modo, si las componentes tienen números reales y complejos, se entenderán todos como complejos.

```
> c(1, 1+2i)
```

```

[1] 1+0i 1+2i
> c(1-1i, 2)
[1] 1-1i 2+0i
># Se presenta un ejemplo de vector con cadenas de caracteres
> dias.semana=c("Lunes","Martes","Miércoles", ... ,"Sábado","
  Domingo")
> dias.semana
[1] "Lunes" "Martes" "Miércoles" "Jueves" "Viernes" "Sábado"
  "Domingo"

```

En R podemos asignar nombres a los elementos de un vector mediante la función "names" (que también se puede utilizar para nombrar cualquier objeto).

```

> x<-1:7
> x
[1] 1 2 3 4 5 6 7
> names(x)<-c("Lunes","Martes","Miercoles","Jueves","Viernes"
  ,"Sabado","Do_mingo")
> x
Lunes    Martes Miercoles Jueves  Viernes Sabado  Domingo
1                2            3                4                5
                6                7

```

También podemos conocer o cambiar el modo o tipo de los elementos que forman el vector mediante la función "mode" (tomaría los valores: logical, numeric, complex, character, null, list, function, graphics, expression, name, frame, raw y unknown).

```

> y<-seq(from=3, to=11, by=2)
> y
[1] 3 5 7 9 11
> mode(y)
[1] "numeric"
> # Cambiamos el vector y, a componentes en los complejos
> mode(y)<- "complex"
> y
[1] 3+0i 5+0i 7+0i 9+0i 11+0i

```

2.3 Operaciones con vectores

Como sucede con los números reales, R nos permite operar con vectores (dentro de las propiedades de estos). Podemos multiplicar vectores por escalares, vectores por vectores, potencias, sumas, etcétera, teniendo en cuenta el uso del paréntesis y el número de componentes del vector, ya que nos llevaría a diferentes resultados e incluso a errores si no son múltiplos los tamaños entre sí.

```

> (1:5)*(2:6)
[1] 2 6 12 20 30

```

```

> (1:5)^2
[1] 1 4 9 16 25
> 1:5^2
[1] 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22
    23 24 25

```

Si olvidamos el asterisco *, que es el símbolo del producto, entre los vectores, R envía el mensaje del error cometido:

```

> (1:5)(2:6)
Error: tentativa de aplicar una no-función
> (1:5)+(2:6)
[1] 3 5 7 9 11
> (1:5)+(2:4)
[1] 3 5 7 6 8
Mensajes de aviso perdidos
In (1:5)+(2:4) : longitud de objeto mayor no es múltiplo de
    la longitud de uno menor.
># Para elevar a una potencia , basta poner:
> (1:5)^3
[1] 1 8 27 64 125

```

La longitud de un vector puede obtenerse con la función “length” que sirve además para definir la longitud del vector, haciéndolo más largo o más corto; en caso de hacerlo más largo, se completará con NA (valores faltantes).

```

> j<-4
> j
[1] 4
> length(j)
[1] 1

```

2.4 Funciones de vectores

```

> # Asigno a j una longitud igual a 5
> length(j)<-5
> length(j)
[1] 5
> j
[1] 4 NA NA NA NA
> jj<-c("Pepe","Paco")
> # Asigno a jj una longitud igual a 5
> length(jj)<-5
> jj
[1] "Pepe" "Paco" NA NA NA

```

Podemos referirnos a la componente que ocupa la posición "i" de un vector "x", mediante "x[i]", o referirnos a ciertas componentes dadas por medio del respectivo vector de subíndices.

```
> aa<-(1:6)^3
> aa
[1] 1 8 27 64 125 216
> aa[5]
[1] 125
> aa[c(1,3,5)]
[1] 1 27 125
```

Si los subíndices son valores lógicos, se corresponden con los mismos elementos del vector, pero sólo hacen referencia a los que tienen un subíndice con valor lógico TRUE.

```
> # Asignamos sexo a tres componentes:
> sexo<-c("Mujer","Mujer","Hombre")
> # Asignamos nombre a tres elementos ordenados
> nombre<-c("Pepa","Pepita","Pepe")
> # Preguntamos las componentes de nombre que corresponden a
  Mujer
> sexo==Mujer
Error: objeto 'Mujer' no encontrado
> # Un caracter tiene que ir siempre entre ""
> sexo=="Mujer"
[1] TRUE TRUE FALSE
> # Si se desean solo las componentes que son iguales a Mujer
> nombre[sexo=="Mujer"]
[1] "Pepa" "Pepita"
```

A continuación tenemos un conjunto de funciones muy útiles a la hora de trabajar con vectores:

FUNCIONES	DESCRIPCION
mean(x)	Media aritmetica de los valores del vector x
median(x)	Mediana de los valores del vector x
sum(x)	Suma de los valores del vector x
max(x)	Máximo valor de los valores del vector x
min(x)	Mínimo valor de los valores del vector x
range(x)	Rango de los valores del vector x
var(x)	Cuasivarianza de los valores del vector x
cov(x)	Covarianza de los valores del vector x
cor(x,y)	Coeficiente correlacion entre los vectores x y y
sort(x)	Una version ordenada de x
rank(x)	Vector de las las de los valores en x
order(x)	Indica la posicion que tendrian los valores ordenados de x
quantile(x)	Mínimo, primer cuartil, mediana, tercer cuartil y maximo de x
cumsum(x)	Vector formado por la frecuencia acumulada del vector x
cumprod(x)	Vector formado por el producto acumulado del vector x
cummax(x)	Vector de x tal que cada valor menor se sustituye por el anterior
cummin(x)	Vector de x tal que cada valor mayor se sustituye por el anterior
pmax(x,y,z)	Vector con longitud la más larga de x, y o z, con los valores máximos de cada posición
pmin(x,y,z)	Vector con longitud la más larga de x, y o z, con los valores mínimos de cada posición

Un ejemplo en el que podemos ver el comportamiento de cada una de las funciones:

```

> x<-c(1,2,3,4,5)
> y<-c(1,3,3,1,5)
> z<-c(1,3,3)
> mean(x)
[1] 3
> median(x)
[1] 3
> sum(x)
[1] 15
> max(x)
[1] 5
> min(x)
[1] 1
> range(x)
[1] 1 5
> # La cuasivarianza, o varianza muestral
> var(x)
[1] 2.5
> # Veamos que es así
> n=length(x)

```



```

> sum((x-mean(x))^2)/(n-1)
[1] 2.5
> # La varianza sería
> ((n-1)/n)*var(x)
[1] 2
> sum((x-mean(x))^2)/(n)
[1] 2
> cov(x,y)
[1] 1.5
> sum((x-mean(x))*(y-mean(y)))/(n-1)
[1] 1.5
> cor(x,y)
[1] 0.5669467
> sort(x)
[1] 1 2 3 4 5
> sort(y)
[1] 1 1 3 3 5
> cumprod(y)
[1] 1 3 9 9 45
> cummax(x)
[1] 1 2 3 4 5
> cummin(x)
[1] 1 1 1 1 1
> pmax(x,y,z)
[1] 1 3 3 4 5
> pmin(x,y,z)
[1] 1 2 3 1 3

```

2.5 Generación de matrices

Las matrices o variables indexadas (Arrays) son generalizaciones multidimensionales de vectores. De hecho, son vectores indexados por dos o más índices y que se imprimen de modo especial. Para crearlas utilizamos la función “matrix”.

Los parámetros principales de esta función son: data (vector que contiene los valores que formarán la matriz), nrow (número de filas), ncol (número de columnas).

```

> m1<-matrix(1,2,3)
> # Hemos generado una matriz de unos de dos filas y tres
  columnas
> m2<-matrix(1:8,4)
> m2
[,1] [,2]
[1,] 1 5
[2,] 2 6
[3,] 3 7
[4,] 4 8

```

```

> # Hemos formado una matriz con el vector 1:8 de cuatro
  filas
> # Hay que tener en cuenta el tamaño de la matriz
> m2<-matrix(1:4,3)
># Mensajes de aviso perdidos
In matrix(1:4, 3) : la longitud de los datos [4] no es un
  submúltiplo o múltiplo del número de filas [3] en la
  matriz
> m3<-matrix(1:8,ncol=4)
> # Hemos formado una matriz con el vector 1:8 de cuatro
  columnas

```

Si se quiere dar nombres a las columnas (o a las filas) puede hacerlo asignando valores al parámetro "dimnames", lista con los nombres de las filas y las columnas. Las componentes de la lista deben tener longitud 0 o ser un vector de cadenas de caracteres con la misma longitud que la dimensión de la matriz.

```

> # Renombramos las columnas
> matrix(1:9,3,3,dim=list(c(),"A1","A2","A3"))
A1 A2 A3
[1,] 1 4 7
[2,] 2 5 8
[3,] 3 6 9
> # Renombramos las filas
> matrix(1:9,3,3,dim=list(c("a1","a2","a3"),c()))
[,1] [,2] [,3]
a1 1 4 7
a2 2 5 8
a3 3 6 9
> # Renombramos filas y columnas
> matrix(1:9,3,3,dim=list(c("a1","a2","a3"),c("A1","A2","A3")
  ))
A1 A2 A3
a1 1 4 7
a2 2 5 8
a3 3 6 9

```

2.6 Operaciones con matrices

Una operación muy común es hacer referencia a una submatriz o a un elemento de la matriz; se realiza indicando los índices de los elementos a los que se hace referencia:

- Podemos hacer referencia a una fila (vector) mediante "matriz[i,]", con "i" el índice de la fila que queremos mostrar, o
- una columna mediante "matriz[,j]" con "j" el índice de la columna que queremos mostrar.

- Si se quiere mostrar una componente concreta, indicamos los dos índices correspondientes: `matriz[i; j]`.

Por ejemplo: `matriz[2; 1]` da el valor de la segunda fila y primera columna.

Un argumento útil en estas operaciones es la variable lógica `byrow` que indica si la matriz debe construirse por filas o por columnas (el valor predeterminado es F).

Se puede realizar operaciones con matrices de la misma forma que con los vectores, es decir, componente a componente: suma, resta, multiplicación por escalares, multiplicación elemento a elemento, división elemento a elemento, exponenciación, que se realizan mediante los símbolos: `+`, `-`, `*`, `=`, `^`.

```
> M1<-matrix(1:6,2,3)
> M2<-matrix((1:6)^2,2,3)
> M2
[,1] [,2] [,3]
[1,] 1 9 25
[2,] 4 16 36
># La suma de las dos matrices
> M1+M2
[,1] [,2] [,3]
[1,] 2 12 30
[2,] 6 20 42
> # Se ha sumado componente a componente
> M1*M2
[,1] [,2] [,3]
[1,] 1 27 125
[2,] 8 64 216
> # Se ha multiplicado componente a componente
> M2/M1
[,1] [,2] [,3]
[1,] 1 3 5
[2,] 2 4 6
> # Se ha dividido componente a componente
> M2 %%M1
[,1] [,2] [,3]
[1,] 0 0 0
[2,] 0 0 0
```

Es posible realizar el producto matricial mediante el operador `"% * %"`.

```
> A1<-matrix(1:6,2,3)
> B1<-matrix(1:12,3,4)
> A1 %*% B1
[,1] [,2] [,3] [,4]
[1,] 22 49 76 103
[2,] 28 64 100 136
> B1 %*% A1
```

Error en B1 %*%A1 : argumentos no compatibles

> # Hay que tener en cuenta las dimensiones de las matrices

La función "crossprod" devuelve el producto matricial cruzado de dos matrices (la traspuesta de la primera matriz, multiplicada por la segunda). Si no se especifica la segunda matriz, R la toma igual a la primera, con lo que obtiene $X^t X$.

```
> A1<-matrix(1:6,2,3)
> A2<-matrix(c(1,1,2,3),2)
> crossprod(A1,A2)
[,1] [,2]
[1,] 3 8
[2,] 7 18
[3,] 11 28
> crossprod(A1)
[,1] [,2] [,3]
[1,] 5 11 17
[2,] 11 25 39
[3,] 17 39 61
```

La función "rbind" se usa para unir dos matrices por filas (y "cbind" por columnas)

```
> m1<-matrix(1,nr=2,nc=2)
> m1
[,1] [,2]
[1,] 1 1
[2,] 1 1
> m2<-matrix(2,nr=2,nc=2)
> m2
[,1] [,2]
[1,] 2 2
[2,] 2 2
> # A continuación se unen las dos matrices por filas con la
  siguiente orden:
> rbind(m1,m2)
[,1] [,2]
[1,] 1 1
[2,] 1 1
[3,] 2 2
[4,] 2 2
> # Se unen las dos matrices por columnas usando la siguiente
  instrucción:
> cbind(m1,m2)
[,1] [,2] [,3] [,4]
[1,] 1 1 2 2
[2,] 1 1 2 2
```

2.7 Funciones de matrices

La función “t()” calcula la matriz traspuesta.

```
> A1
[,1] [,2] [,3]
[1,] 1 3 5
[2,] 2 4 6
> t(A1)
[,1] [,2]
[1,] 1 2
[2,] 3 4
[3,] 5 6
```

La función “diag()” se puede usar para extraer o modificar la diagonal de una matriz o para construir una matriz diagonal.

```
> diag(m1)
[1] 1 1
> diag(m2)
[1] 2 2
> # A continuación se modifica la diagonal de la matriz m1
> diag(m1)=15
> m1
[,1] [,2]
[1,] 15 1
[2,] 1 15
```

Ahora se crea una matriz diagonal, de orden 3, con las componentes del vector:

```
> v<-c(10,15,20)
> diag(v)
[,1] [,2] [,3]
[1,] 10 0 0
[2,] 0 15 0
[3,] 0 0 20
> diag(3.6, nr=2, nc=5)
[,1] [,2] [,3] [,4] [,5]
[1,] 3.6 0.0 0 0 0
[2,] 0.0 3.6 0 0 0
```

También se puede evaluar funciones de operaciones matriciales, por ejemplo:

```
> diag(rbind(m1,m2) %*% cbind(m1,m2))
[1] 226 226 8 8
```

La función “solve” invierte una matriz (si se le da un argumento) y resuelve sistemas lineales de ecuaciones (cuando se le dan dos).

El primer argumento es una matriz que debe ser cuadrada no singular, y el segundo argumento (opcional) es un vector o matriz de coeficientes.

También podemos utilizarla para resolver sistemas de ecuaciones (por ejemplo $x + 2y = 1$, $x + 3y = 2$), pasando el sistema a forma matricial.

```
> A2
[,1] [,2]
[1,] 1 2
[2,] 1 3
> b1=c(1,2)
> b1
[1] 1 2
> solve(A2)
[,1] [,2]
[1,] 3 -2
[2,] -1 1
> solve(A2,b1)
[1] -1 1
```

La función “eigen” calcula los autovalores y autovectores de una matriz cuadrada, el resultado es una lista de dos componentes llamados values y vectors.

```
> A2
[,1] [,2]
[1,] 1 2
[2,] 1 3
> eigen(A2)
$values
[1] 3.7320508 0.2679492
$vectors
[,1] [,2]
[1,] -0.5906905 -0.9390708
[2,] -0.8068982 0.3437238
```

Con la función “det” calculamos el determinante de una matriz cuadrada.

```
> det(A2)
[1] 1
```

Además existen funciones como “svd()” que calcula la descomposición en valores singulares.

```
> svd(A2)
$d
[1] 3.8643285 0.2587772
$u
[,1] [,2]
[1,] -0.5760484 -0.8174156
[2,] -0.8174156 0.5760484
$v
[,1] [,2]
```

```
[1,] -0.3605967 -0.9327218
[2,] -0.9327218  0.3605967
```

2.8 arrays (variables multiindexadas)

La generalización de los vectores y matrices son las variables multiindexadas, denominadas arrays, y de las cuales son casos particulares los vectores y matrices.

Una variable indexada (array) es una colección de datos, por ejemplo numéricos, indexados por varios índices.

R permite crear y manipular variables indexadas, por ejemplo para crear una variable multiindexada se utiliza la función “array(data, dim, dimnames)” donde “dim” es un vector de dimensiones.

Además podemos hacer referencia a cualquier subconjunto de la misma, de modo similar a las matrices.

```
> # array se comporta de la misma manera que matrix
> x1
[,1] [,2] [,3] [,4] [,5]
[1,] 1 4 2 5 3
[2,] 2 5 3 1 4
[3,] 3 1 4 2 5
> i<-array(c(1:5,3:1),dim=c(3,2))
> i
[,1] [,2]
[1,] 1 4
[2,] 2 5
[3,] 3 3
```

Un arreglo (array) puede tener más dimensiones; por ejemplo, ser de orden $2 \times 3 \times 3$

```
> z<-array(1:5,c(2,3,3))
> z
, , 1
[,1] [,2] [,3]
[1,] 1 3 5
[2,] 2 4 1
, , 2
[,1] [,2] [,3]
[1,] 2 4 1
[2,] 3 5 2
, , 3
[,1] [,2] [,3]
[1,] 3 5 2
[2,] 4 1 3
> z[1,,]
[,1] [,2] [,3]
```

```

[1,] 1 2 3
[2,] 3 4 5
[3,] 5 1 2
> z[1,1,]
[1] 1 2 3
> z[1,1,1]
[1] 1

```

2.9 Listas

Una lista se construye con la función "list" que devuelve un objeto de tipo lista con tantos componentes como argumentos se le suministren y es utilizado para devolver el resultado de una función.

```

> dias.semmana=c("Lunes","Martes","Miercoles","Jueves","Viernes",
  "","Sabado","Domingo")
> dias.semmana
[1] "Lunes" "Martes" "Miercoles" "Jueves" "Viernes" "Sabado"
[7] "Domingo"
> list(A=dias.semmana,B=1:7)

```

Puede referirse a cada uno de los elementos de la lista de dos formas distintas: Si tiene nombre, como en este caso, mediante el nombre de la lista, el símbolo \$ y el nombre del elemento.

```

$A
[1] "Lunes" "Martes" "Miercoles" "Jueves" "Viernes" "Sabado"
[7] "Domingo"
$B
[1] 1 2 3 4 5 6 7

```

En todo caso, siempre se puede referir a él mediante el índice de posición entre dobles corchetes.

```

> list(A=dias.semmana,B=1:7)$A
[1] "Lunes" "Martes" "Miércoles" "Jueves" "Viernes" "Sábado"
"Domingo"
> list(A=dias.semmana,B=1:7)$B
[1] 1 2 3 4 5 6 7
> list(A=dias.semmana,B=1:7)[[2]]
[1] 1 2 3 4 5 6 7
> list(A=dias.semmana,B=1:7)[[1]]
[1] "Lunes" "Martes" "Miércoles" "Jueves" "Viernes" "Sábado"
"Domingo"

```


2.10 Hoja de datos (data.frame)

Una hoja de datos (Data frame) es una lista que pertenece a la clase "data.frame". Hay restricciones en las listas que pueden pertenecer a esta clase, en particular: las componentes deben ser vectores (numéricos, cadenas de caracteres, o lógicos), factores, matrices numéricas, listas u otras hojas de datos.

Las matrices, listas, y hojas de datos contribuyen a la nueva hoja de datos con tantas variables como columnas, elementos o variables posean, respectivamente.

La diferencia fundamental con la matriz de datos es que este objeto no tiene por que estar compuesto de elementos del mismo tipo. Los objetos pueden ser vectores, matrices, listas e incluso hojas de datos.

```
> datos1<-data.frame(Peso=c(90,120,56), Altura=c
  (1.90,1.87,1.70))
> datos1
Peso Altura
1  90  1.90
2 120  1.87
3  56  1.70
> datos2<-data.frame(datos1, Sexo=c("Hombre","Hombre","Mujer"
  ))
> datos2
Peso Altura Sexo
1 90  1.90 Hombre
2 120 1.87 Hombre
3 56  1.70 Mujer
>nombres<-c("Pepe","Paco","Pepita")
> datos3<-data.frame(datos2, Nombres=I(nombres))
> datos3
Peso Altura Sexo Nombres
1 90  1.90 Hombre Pepe
2 120 1.87 Hombre Paco
3 56  1.70 Mujer Pepita
```

Si desea seleccionar un subconjunto de una hoja de datos, puede hacerlo con la función subset. Función que puede utilizar también en vectores.

```
> subset(datos3, select=c(Sexo, Nombres))
Sexo Nombres
1 Hombre Pepe
2 Hombre Paco
3 Mujer Pepita
> subset(datos3, subset=c(Sexo=="Mujer"))
Peso Altura Sexo Nombres
3 56  1.7  Mujer Pepita
```

Para realizar modificaciones en un data frame es muy útil la función transform.

```
> transform(datos3, logPeso=log(Peso))
```

```

Peso Altura Sexo Nombres logPeso
1 90 1.90 Hombre Pepe 4.499810
2 120 1.87 Hombre Paco 4.787492
3 56 1.70 Mujer Pepita 4.025352
> # A continuación se modifica el data.frame
> transform(datos3,IMC=Peso/(Altura)^2)
Peso Altura Sexo Nombres IMC
1 90 1.90 Hombre Pepe 24.93075
2 120 1.87 Hombre Paco 34.31611
3 56 1.70 Mujer Pepita 19.37716

```

Hay funciones que permiten comprobar si un objeto es de un tipo determinado, todas comienzan por "is.", o facultan cambiar el objeto a un tipo concreto, funciones que comienzan por "as".

```

># A continuación se ilustra el uso de tales funciones
> x<-1:10
> is.vector(x)
[1] TRUE
> is.data.frame(x)
[1] FALSE
> x<-as.data.frame(x)
> is.data.frame(x)
[1] TRUE

```

La función de R "data.frame" concatena todas las variables en un solo conjunto de datos, o también se las podría guardar en un archivo de datos utilizando la función "write.table".

El formato del archivo guardado es .CSV (comma separated variables, variables separadas por comas), el cual es un formato de texto muy fácil de leer con cualquier editor de texto o con Excel. El archivo puede ser leído en R con la función "read.csv".

La notación \$ para componentes de listas, como por ejemplo "datos3\$Peso", puede no ser la más apropiada (simple o útil), en estas ocasiones, será cómodo que los componentes de una lista, o de una hoja de datos, puedan ser tratados temporalmente como variables cuyo nombre sea el del componente, sin tener que especificar explícitamente el nombre de la lista.

Supongamos que "datos3" es la hoja de datos, que se creó en las transparencias anteriores, que consta de las cuatro variables (vectores): datos3\$Peso, datos3\$Altura, datos3\$Sexo, datos3\$Nombres.

Para poder trabajar con la variable Peso directamente se da la instrucción:

```

> attach(datos3)

```

De esta manera se pueda usar directamente el vector Peso (en lugar de datos3\$Peso)

```

>Peso
[1] 90 120 56

```

En síntesis la función "attach()" puede tener como argumento el nombre de una lista, o de una hoja de datos, y permite utilizar la componente directamente.

La orden "attach(datos3)" nos vincula a la hoja de datos colocándola en la segunda posición de la trayectoria de búsqueda, de modo que si no existen variables con los nombres Peso o Altura en la primera posición; Peso y Altura aparecerán como variables por sí mismas.

Para desvincularse de una hoja de datos, utilice la función "detach()". Esta función permite desvincularnos de la entidad que se encuentre en la segunda posición de la trayectoria de búsqueda.

Una vez realizada esta operación dejarán de existir las variables Peso y Altura como tales, claro está seguirán existiendo como componentes de la hoja de datos.

Las entidades que ocupan en la trayectoria de búsqueda posiciones superiores a la segunda, pueden desvincularse dando su posición o su nombre como argumento a la función "detach".

Preferimos esta segunda opción, como por ejemplo "detach(abc)" o "detach("abc")".

Hay que tener en consideración que la trayectoria de búsqueda puede almacenar un número finito y pequeño de elementos, por tanto no debemos vincularnos con una misma hoja de datos más de una vez.

Del mismo modo, conviene desvincularse de una hoja de datos cuando se termina de utilizar sus variables.

2.11 Lectura y escritura de datos

Una opción tan interesante como necesaria es la de lectura y escritura de ficheros de datos. R permite importar datos desde cualquier tipo de fichero de datos básico, tal como bases de datos, archivos excel, de SPSS, de Minitab, de STATA, de documentos de texto, archivos .dat, etcétera.

La orden de lectura de datos es "read.table", con ella y con sus argumentos podemos leer los archivos e indicar el modo en el que ellos están contruidos. La forma correcta y más simple de utilizar la instrucción será:

```
>read.table(\ruta del archivo/datos1.txt", _header=TRUE, _sep=,
  _na.strings=\NA", dec=\.")
```

Con ella estamos diciendo que lea los datos "/datos1.txt" que se encuentra en tal ruta (separada por \), que dichos datos tienen cabecera, es decir que existe una primera fila con los nombres de las variables (si no tienen los datos cabecera, el argumento será header=FALSE).

Con "na.strings="NA"" le decimos que los valores faltantes los tome como nulos. El separador decimal de los datos que tenemos es el punto en vez de la coma.

Hay otros argumentos que se pueden añadir a la función, tales como indicar el tipo de valores de los datos (lógicos, enteros, etc.) el número de columnas, etcétera.

```
> # Leemos el archivo s.txt y lo llamo Datos
> Datos <- read.table("C:/Users/jmcontreras/Desktop/MALETA/s.
  txt",
  header=FALSE, sep=" ", na.strings="NA", dec=".")
```

Con la función "View" se visualizan los datos que hemos cargado en la memoria anteriormente.

> View(Datos)

La función `write` tiene como argumentos los siguientes `write(x, file = "data", ncolumns = , append =FALSE, sep = " ")`, donde `x` el nombre de la variable que queremos exportar, `file` es el nombre y tipo de fichero que crearemos, `ncolumns` el número de columnas y `sep` es el separador (en nuestro caso espacios en blanco). El argumento "append" es el más útil a la hora de simulaciones ya que con el podemos conservar los datos del fichero que tuviésemos anteriormente si `append=TRUE`, solo que los nuevos se añadirán a los anteriores en filas posteriores. Si `append = FALSE` reemplazaremos los datos anteriores por los nuevos.

3 Funciones

3.1 Definición de una función

Como se ha mencionado anteriormente, las funciones permiten realizar las diferentes acciones.

Existen funciones definidas (pueden ser modificadas), pero lo más importante es que R permite crear objetos del modo `function`, es decir nos permite construir nuevas funciones de R que realicen tareas que no estaban definidas en el momento de instalar el programa, que además pueden utilizar a su vez en expresiones posteriores ganando considerablemente en potencia, comodidad y elegancia.

Estas nuevas funciones se incorporan al lenguaje y se utilizan posteriormente como las previamente existentes.

Nótese que para obtener ayuda sobre qué es lo que hace una función utilizaremos la función `help`. Si necesita ejecutar un programa del sistema operativo puede utilizar la función `system`, que permite incluso salir al sistema operativo con la orden `system("cmd")`. Para obtener información del sistema, utilizamos `shell`, por ejemplo en `shell("dir")`.

Las funciones tradicionales en cualquier lenguaje de uso matemático y estadístico, están definidas.

Entre ellas se encuentran, entre otras: `abs`, `sqrt`, `sin`, `cos`, `tan`, `asin`, `acos`, `atan`, `exp`, `log`, `log10`, `min`, `max`, `sum`, `prod`, `length`, `mean`, `range`, `median`, `var`, `cov`, `summary`, `sort`, `rev`, `order`.

>#Algunos ejemplos de evaluación de funciones usuales

```
> sin(1:5)
[1] 0.8414710 0.9092974 0.1411200 -0.7568025 -0.9589243
> sin(pi)
[1] 1.224606e-16
> sin(pi/2)
[1] 1
> sum(1:5)
[1] 15
> prod(1:5)
[1] 120
```

Una función se define asignando a un objeto la palabra “function” seguida de los argumentos que desee dar a la función, escritos entre paréntesis y separados por comas, seguida de la orden, entre llaves si son varias órdenes, que desee asignar a la misma.

Entre los argumentos destaca que si utiliza tres puntos seguidos, ..., ello indica que el número de argumentos es arbitrario.

```
Nombre<- function(arg1 , arg2 , ... ) expression
```

La expresión es una fórmula, o grupo de fórmulas, que utilizan los argumentos para calcular su valor.

El valor de dicha expresión es el valor que proporciona R en su salida, y éste puede ser un número, un vector, una grafica, una lista o un mensaje.

El uso (o evaluación) de la función es normalmente de la forma:

```
>NombreDeFuncion(expr 1 , expr 2 , ...)
```

La instrucción “return” termina la función y devuelve su(s) resultado(s); cuando se encuentra esta función se detiene la ejecución y se devuelven los valores indicados.

Es posible acceder a los argumentos de una función mediante la función “formals”.

```
> formals(primera . función)
```

3.2 Ejemplos sobre creación de funciones

Como pretendemos que este sea una introducción al uso de R sobre todo para su uso estadístico, empezaremos creando la función más común en este área: la media.

La función media es una función de un solo argumento (si no se especifica lo tomaremos por NA (valor nulo) y el resultado sería NA).

En caso de que se le suministre un argumento, no se comprueba si es válido o no, sino que suponiendo que es un vector, se eliminan del mismo los elementos correspondientes a NA; para ello se utiliza la negación “!” y la condición de ser un valor no disponible.

```
># A continuación se crea la función media
> media<-function(x=NA)
+ {
+ x<-x[!is.na(x)]
+ sum(x)/length(x)
+ }
> media(c(2,4,1,3,6,7))
[1] 3.833333
> media(c(2,4,1,3,6,NA))
[1] 3.2
```

Como ejemplo se ha creado la función media, usando de R las funciones sum y length; aún cuando R ya tiene implementada, como vimos anteriormente, la función “mean” que calcula la media de los valores que le indiquemos.

```
> mean(c(2,4,1,3,6,7))
[1] 3.833333
```

Así mismo podríamos crear o simplemente usar la función “var” que corresponde a la varianza, etcétera.

4 Estructuras del lenguaje R

4.1 Estructuras condicionales

La primera estructura es:

```
if (condición) acción1 [else acción2]
```

La segunda estructura es:

```
ifelse(condición, acción en caso cierto, acción en caso falso
)
```

La tercera estructura es:

```
switch(expresión, [valor-1=]acción-1, ..., [valor-n=]acción-n)
```

En la construcción condicional “if” de la forma

```
> if (expr1) expr2 else expr3
```

la primera expresión `expr1` es una condición que debe producir un valor lógico (T o F); si éste es verdadero (T), se ejecutará la acción manifestada en `expr2`; y si es falso (F), y se ha escrito la opción `else`, que es opcional, se ejecutará la acción declarada por `expr3`.

Estas acciones pueden ser múltiples instrucciones (particularmente asignaciones) que deben agruparse entre llaves {instr.1; instr.2; ...; instr.m}. Por tanto se pueden pensar las llaves: “{” como begin (inicio); y, “}” como end (fin) del bloque de instrucciones.

4.2 Estructuras de repetición

Hay tres tipos de estructuras de repetición, representadas por las construcciones: “for”, “while”, y, “repeat”, cuya sintaxis se describe a continuación:

```
for (variable in valores) acción
```

La estructura “for” asigna a variable cada uno de los valores y realiza la acción para cada valor.

```
while (condición) acción
```

La estructura “while” evalúa la condición y mientras esta es cierta se realiza la acción.

La tercera estructura de repetición es:

```
repeat acción
```

La estructura “repeat” realiza la acción indefinidamente.

En estas estructuras también las acciones pueden ser múltiples instrucciones (particularmente asignaciones) que deben agruparse entre llaves {instr.1; instr.2; ...; instr.m}.

En los tres casos, el valor del ciclo completo es el de la última ejecución de la acción.

Las expresiones pueden contener algún condicional como “if” asociado con las funciones “next” o “break”.

La estructura “next” indica que debe terminarse la iteración actual y pasar a la siguiente. La estructura “break” indica que debe terminarse el ciclo actual.

4.3 Uso de estructuras para crear funciones

Factorial de un número

```
> factorial<-function(n)
+ {
+ f<-1
+ if(n>1)
+ for(i in 1:n)
+ f<-f*i
+ return(f)
+ }
> factorial(3)
[1] 6
> factorial(25)
[1] 1.551121e+25
> factorial(0)
[1] 1
>factorial(4)
[1]24
```

Para generar los términos de una progresión aritmética, se puede construir tres funciones: la primera corresponde a la forma explícita, la segunda a la forma recursiva y la tercera a la forma recursiva vectorial.

```
> arit.1<-function(n=1,a1=1,d=1) a1+d*(n-1)
> arit.2<-function(n=1,a1=1,d=1)
+ {
+ if(n>1){return(arit.2(n-1,a1,d)+d)}
+ else{return(a1)}
+ }
> arit.3<-function(n=1,a1=1,d=1)
+ {
+ A=1:n
+ A[1]=a1
+ for(i in 2:n)A[i]=A[i-1]+d
+ return(A[n])
```

```

+ }
> arit.1(10)
[1] 10
> arit.2(10)
[1] 10
> arit.3(10)
[1] 10

```

Para generar los términos de una progresión geométrica, se puede construir la función:

```

> P.geometrica<-function(n=1,a1=1,r=1)
{
a1+r^(n-1)
}
> P.geometrica()
[1] 2
> P.geometrica(2,3,2)
[1] 5
> # Otra forma sería:
> P.geometrica2<-function(n=1,a1=1,r=1)
+ {
+ if(n>1){P.geometrica(n-1,a1,r)*r}
+ else{a1}
+ }
> P.geometrica2(2,3,2)
[1] 6

```

Una última forma sería

```

> P.geometrica3<-function(n=1,a1=1,r=1)
+ {
+ if(n==1) return(a1)
+ A=1:n A[1]=a1
+ for(i in 2:n) A[i]=A[i-1]*r return(A[n])
+ }
> P.geometrica3(2,3,2)
[1] 6

```

5 Dispositivos gráficos

5.1 Funciones gráficas básicas

Algunos de los gráficos más usuales pueden generarse a partir de funciones básicas tales como:

abline()	Función que añade una o más líneas rectas.
plot()	Función genérica para representar, en el plano xy, puntos, líneas, etc.
barplot()	Diagramas de barras.
pie()	Diagramas de sectores.
hist()	Histogramas.
boxplot()	Diagramas de box-and-whisker.
stripplot()	Similares a boxplot() con puntos.
sunflowerplot()	Representación en el plano xy de diagramas de girasol.
qqnor()	Diagramas de cuantil a cuantil frente a la distribución normal.
qqplot()	Diagramas de cuantil a cuantil de dos muestras.
qqline()	Representa la línea que pasa por el primer y el tercer cuantil.
lines()	Añade líneas a un gráfico.
points()	Añade puntos a un gráfico.
segments()	Añade segmentos a un gráfico.
arrows()	Añade flechas a un gráfico.
polygons()	Añade polígonos a un gráfico.
rect()	Añade rectángulos a un gráfico.
abline()	Añade una recta de pendiente e intersección dada.
curve()	Representa una función dada.

Además existen funciones específicas en las que funciona de modo especial, como por ejemplo para `data.frame`, `lm`, etcétera.

A continuación se usan las funciones descritas anteriormente, en ejemplos ilustrativos. `plot` es una función genérica que crea un gráfico en el dispositivo gráfico actual.

```
> x<-seq(-10,10)
> x
[1] -10 -9 -8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8
[20] 9 10
> plot(x,x,xlim=c(0,10),ylim=c(0,10))
```

Se puede también dar la siguiente instrucción, un poco más elaborada o dificultosa:

```
> plot(1:100,(1:100)^2,type="l")
># A continuación se genera un gráfico de dos variables
  comprendidas entre -4 y 4, así:
> plot(-4:4, -4:4, type = "n")
># Ahora se representan veinte números aleatorios, con una
  distribución normal en rojo, con la instrucción:
> points(rnorm(20), rnorm(20), col = "red")
```

Ahora se presentan diez números aleatorios, con una distribución normal, en azul y más grandes, con la orden

```
> points(rnorm(10), rnorm(10), col = "blue", cex = 3)
```

La función `abline` se puede usar para crear un conjunto de líneas que separen en filas la gráfica.

```
> for(i in 1:10) abline(h=i, col=i)
```

Se usa también para crear un conjunto de líneas que separen la gráfica en columnas.

```
> for(i in 1:10) abline(v=i, col=i)
```

A continuación se crea una gráfica de dos variables x e y ; con x entre -2 y 3 y con y entre -1 y 5 .

```
> plot(c(-2,3), c(-1,5), type = "n", xlab="x", ylab="y", asp
= 1)
> # Se genera ahora un eje xy de color rojo
> abline(h=0, v=0, col = "red")
> # Se asigna una leyenda (recta  $y = 0$ ), de color azul en el
par (1,0)
> text(1,0, "recta (y=0)", col = "blue", adj = c(0, -.1))
> # Se crea una recta de pendiente 2 y término independiente
1
> abline(a=1, b=2, col = 2)
> # Se añade una leyenda para nombrar la recta  $y=2x+1$ 
> text(1,3, "recta y=2x+1", col= "green", adj=c(-.1, -.1))
```

Con la función `curve` se crean funciones no lineales, tanto polinomiales como trigonométricas.

```
> curve(sin, -2*pi, 2*pi)
> curve(tan)
> # Si borramos la gráfica anterior sale diferente
> # Polinomiales
> curve(x^3-3*x, -2, 2)
> # Le adjuntamos una parábola
> curve(x^2-2*x+1, add = TRUE, col = "red")
```

Un argumento interesante es `add`, con el podemos adjuntar varias gráficas a la vez.

```
> curve(sin(x), -pi, pi, col="blue")
> curve(cos(x), -pi, pi, add=TRUE, col="red")
```

La función `text` es muy útil, ya que nos permite añadir texto a un gráfico existente; por ejemplo, al gráfico de la función seno.

```
> curve(sin(x), -pi, pi, col="red")
> text(-2, 0.5, "seno de x", col="blue")
```

5.2 Funciones para gráficos estadísticos

Los diagramas de barras los creamos con la función “barplot”. Empezamos con un ejemplo fácil, supongamos que hemos recogido unos datos que hemos codificado con escalas del 1 al 4. Se requiere hacer un diagrama de barras con los resultados del análisis de la variable x.

```
> x<-c(1,2,3,1,2,1,2,4,1,3,2,4,1,2,3,1,2,4,2,1)
> # Se determina la frecuencia acumulada de cada una de las
  variables
> table(x)
> freq.x<-table(x)
> # Se crea el diagrama de barras con las leyendas
> barplot(freq.x, main="Frecuencia_relativa", xlab="Valores_
  de_la_variable")
```

Entonces se ponen nombres a las variables y se cambia las barras de vertical a horizontal.

```
> barplot(freq.x, main="Frecuencia_relativa", xlab="valores_
  de_la_variable",
+ horiz=TRUE, names.arg=c("Menores_de_18", "De_18_a_45", "De_
  45_a_65",
+ "Más_de_65"))
```

Los diagramas de sectores circulares para datos cualitativos se crean con la función “pie”. Por ejemplo, un diagrama básico será:

```
> # Diagrama simple de sectores
> muestra <- c(15, 12,4, 16, 8)
> paises<- c("USA", "Inglaterra", "Australia", "Alemania", "
  Francia")
> pie(muestra, labels = paises, main="Diagrama_de_sectores_de
  _países")
```

Los histogramas para variables continuas se construyen con la función “hist”

```
> # Histograma de la variable x, con 1000 datos normales
> x<-rnorm(1000)
> hist(x)
```

Como vemos crea un histograma con los datos y como estos datos son normales el histograma se asemeja a la curva normal. R asigna el número de intervalos y la amplitud de ellos; si se quiere modificarlos se usan los argumentos “break” que indican los puntos de corte junto con otros argumentos para darles efectos visuales.

```
># Se crean 13 intervalos (12 puntos de corte), de color azul
  y líneas rosas
> hist(x, freq = FALSE, breaks = 12, col="lightblue", border=
  "pink")
```

Referencias

- [1] R Development Core Team. "Introducción a R. Un entorno de programación para Análisis de Datos y Gráficos" Versión 1.0.1, mayo 2000.
- [2] Contreras J., Molina E., Arteaga P., "Introducción a la programación estadística con R para profesores", 2010.
- [3] Ramos R. "El lenguaje de programación R". Centro de Investigación en Matemáticas CIMAT, 2010.

Curso introductorio al Análisis Multicriterio

Rafael Burbano*

Julio 2014

Resumen

El mundo real se caracteriza por la complejidad y la incertidumbre y, en el intento de comprenderla y actuar para modificarla, es necesario recurrir a los instrumentos adecuados. Así, por sus particulares distintivas, el Análisis Multicriterio (AMC) es una herramienta apropiada para el análisis de los problemas del mundo real. El AMC parte de un enfoque sistémico de la realidad; por ello, las problemáticas son analizadas con un enfoque integral y holístico, desde las diversas dimensiones de la sociedad: económica, social, ambiental, cultural, política, tecnológica y legal. En este curso, se presentará la aplicación del AMC: el modelo multicriterio paramétrico compensatorio no-compensatorio Quipu desarrollado por el autor.

1 Introducción

El mundo real se caracteriza por la complejidad y la incertidumbre y, en el intento de comprenderlo y actuar para modificarlo, es necesario recurrir a los instrumentos adecuados. Así, por sus particulares distintivas, el Análisis Multicriterio (AMC) es una herramienta apropiada para el análisis de los problemas del mundo real.

El Análisis Multicriterio parte del enfoque sistémico de la realidad; por ello, las problemáticas son analizadas con un enfoque integral y holístico, desde las diversas dimensiones de la sociedad: económica, social, ambiental, cultural, política, tecnológica y legal.

El AMC o Análisis de Decisión Multicriterio (ADM) —en inglés, *Multicriteria decision making* (MCDM)— se consolidó en la década de los años setenta (Fernández y Escribano 2011:13). En ese entonces, el AMC se consideraba como una técnica particular de la Teoría de la Decisión que buscaba soluciones óptimas en contextos bien estructurados. Posteriormente, reconociendo que un problema con criterios múltiples no necesariamente admite una solución óptima, el AMC evolucionó a Ayuda a la Decisión Multicriterio —*Multiple-criteria decision aid* (MCDA) (Roy, 1985)—; el enfoque es buscar una solución “satisfactoria” que responda lo mejor (o lo menos mal) a los múltiples criterios. El cambio fundamental es considerar a los problemas multicriterio como no bien estructurados matemáticamente; la solución final es más una creación que un descubrimiento; por eso el énfasis en la palabra “ayuda”. En un

*Departamento de Matemática de la Escuela Politécnica Nacional

tercer cambio transcendental, se impulsa la participación de los actores sociales (por ejemplo, Banville et al., 1998) y llegamos a la Evaluación Multicriterio Participativa —*Participatory multicriteria evaluation* (PMCE)—. Como una síntesis de estos procesos, el profesor Giuseppe Munda propone la Evaluación Social Multicriterio —*Social multicriteria evaluation* (SMCE)—, que enfatiza la participación de los actores sociales en problemas de decisión social caracterizados por alta incertidumbre y alto impacto social (Munda, 2004).

Los principios de la Evaluación Social Multicriterio (EMS) pueden resumirse en los siguientes puntos:

1. El esquema clásico de la relación decisor–analista está incrustado en un marco social, que es de importancia crucial en el caso de los problemas de elección pública, tales como el uso del suelo y de las políticas energéticas. (Gamboa y Munda, 2007: 1565)
2. De acuerdo a la escala geográfica escogida, los actores sociales relevantes que tengan intereses en juego pueden ser identificados gracias al análisis institucional. El análisis institucional es un paso esencial para identificar posibles “grupos de interés” para un proceso participativo. (Munda, 2003: 6).
3. La combinación de diferentes métodos de participación, que ha demostrado su fortaleza en la investigación sociológica, se vuelve aún más fuerte cuando se integra con un marco multicriterio. Por ejemplo, el análisis institucional, llevado a cabo principalmente en base a documentos históricos, legislativos y administrativos, así como en la prensa local y entrevistas a personas clave, puede proporcionar un mapa de los actores sociales relevantes. A través de grupos de enfoque, es posible tener una idea de los deseos de la gente y es entonces posible desarrollar un conjunto de opciones de política y criterios de evaluación.
4. La evaluación de la política no es una actividad de un solo paso. Por el contrario, se lleva a cabo como un proceso de aprendizaje que suele ser muy dinámico, por lo que los juicios sobre la relevancia política de los objetos, las alternativas o los impactos pueden presentar cambios bruscos, y se requiere de un análisis de la política de naturaleza flexible y adaptable. Esta es la razón para que los procesos de evaluación deban tener un carácter cíclico.
5. En este marco, los algoritmos matemáticos siguen desempeñando un papel importante (por ejemplo, para asegurar que los rankings obtenidos sean consistentes con la información y los supuestos utilizados). Por esta razón, los algoritmos multicriterio, utilizados en un contexto social, deben ser tan simples como sea posible (es decir, con un número mínimo de parámetros exógenos) y su axiomatización debe ser completa y clara (Gamboa y Munda, 2007: 1565).

Estas extensas citas dejan en claro la importancia de la participación social en los procesos de decisión que involucren proyectos que afecten a una comunidad.

Fases o etapas de un proceso de análisis, evaluación y decisión multicriterio

Diversos autores presentan las fases o etapas de un proceso de análisis, evaluación y decisión multicriterio de manera un tanto diferente. Por ejemplo, Nunes et al (2003: 87 citado por Díez y Etxano, 2008:13), Pomerol and Barba-Romero (2000, citado por Kodikara, 2008: 27), (Munda, 1998: 8). Recapitulando y sintetizando los distintos esquemas, considero que un problema de decisión multicriterio debemos abordarlo mediante el siguiente proceso.

Una evaluación multicriterio normalmente inicia con la identificación y formulación de un problema y el planteamiento del objetivo general. Por ejemplo, digamos que en una región del Ecuador hay problemas de escasez de agua. La formulación del problema corresponde a establecer con claridad el problema planteado: identificar las fuentes y sumideros del agua, usuarios, usos, poblaciones o grupos sociales involucrados, etcétera. El objetivo podría ser: asegurar el uso sustentable del agua en la región.

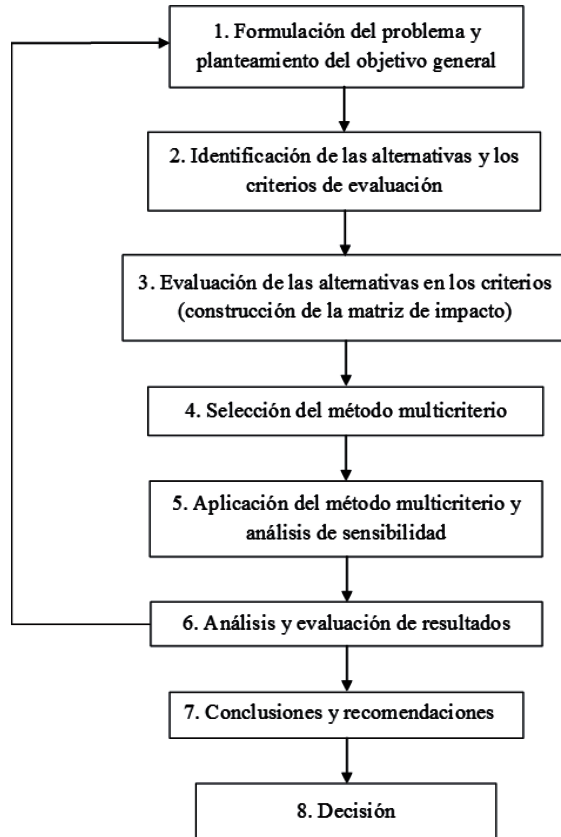
El siguiente paso es identificar y plantear los proyectos o alternativas de solución que permitan alcanzar el objetivo planteado, y establecer los criterios de evaluación de las alternativas propuestas. Con las alternativas y los criterios definidos, hay que construir la matriz de impacto, es decir, evaluar cada uno de los criterios en cada una de las alternativas. Este proceso puede ser bastante complejo y costoso. Por ejemplo, en el problema hipotético del uso del agua, habrá que evaluar los costos de inversión de los distintos proyectos de infraestructura contenidos en las alternativas. Para ello habrá, seguramente, que realizar costosos estudios de pre-factibilidad o factibilidad.

A continuación hay que seleccionar el método multicriterio más adecuado al objetivo general y a las características de la matriz de impacto, y analizar y evaluar las alternativas. Para tener robustez en los resultados, se recomienda realizar el análisis de sensibilidad, es decir, estudiar cómo cambian las soluciones frente a variaciones (pequeñas) en los datos o parámetros. Los resultados obtenidos deben ser analizados y evaluados.

En cualquiera de estas etapas, previo a la generación de conclusiones y recomendaciones, es posible regresar a cualquiera de las fases anteriores en un proceso cíclico y continuo de evaluación y mejora. Por ejemplo, al intentar construir la matriz de impacto podríamos encontrar que el problema no está bien definido, así que habrá que retornar al punto inicial. Cuando estamos conformes con el proceso, se generan las conclusiones y las recomendaciones y, de ser el caso, se toma la decisión. En la figura 1 se resume las fases del Análisis Multicriterio.

Matriz de impacto o matriz de evaluación

El punto de partida del Análisis Multicriterio es un conjunto finito de m **alternativas** $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ y un conjunto finito de n **criterios de evaluación** $F = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$. Cada criterio i es una función $f_i: X \rightarrow Y_i$. La información sobre la evaluación de las m alternativas en los n criterios se condensa en la sección central de la **matriz de impacto** o **matriz de evaluación** $M = (x_{ij})$ con $x_{ij} = f_j(x_i)$ (Martínez-Alier, Munda y O'Neill, 1998: 281).



Fuente: Autor.

Figura 1: Diagrama No. 1 – Fases del Análisis Multicriterio

Adicionalmente, la matriz de impacto recopila la información sobre las unidades $[u] = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$, los **objetivos** o **dirección** $O = \{o_1, o_2, \dots, o_n\}$, los **pesos** o **ponderaciones** $\omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$, y los **umbrales de indiferencia** $c = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ de los n criterios; la agrupación de los criterios en k dimensiones $\{F_1, F_2, \dots, F_k\}$, el **grado de compensación global** α_0 , y los **grados de compensación intradimensión** $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k\}$.

Matriz No. 1 – Matriz de impacto

		Criterios					
Criterio		f_1	f_2	f_n
Unidad		$[u_1]$	$[u_2]$	$[u_n]$
Dirección		o_1	o_2	o_n
Peso		ω_1	ω_2	ω_n
Umbral		c_1	c_2	c_n
Dimensión		F_1			...		F_k
Compensación local (intradimensión)		α_1			...		α_k
Compensación global: α_0							
Alternativas	x_1	x_{11}	x_{12}	x_{1n}
	x_2	x_{21}	x_{22}	x_{2n}
	
	x_m	x_{m1}	x_{m2}	x_{mn}

Fuente: autor

La evaluación de una alternativa en un criterio puede ser un número real ($Y_i = \mathbb{R}$), un número difuso real ($Y_i = \mathcal{D}$), una distribución de probabilidad ($Y_i = \mathcal{S}$) o una categoría ordenada ($Y_i = \mathcal{C}$). Se asume además que f_i induce algún tipo de relación de orden R_i en el conjunto de alternativas¹.

La relación de orden R_i la denominaremos “relación parcial inducida por el criterio i ” o simplemente “relación parcial”. Nótese que con el término “relación parcial” nos referimos al orden definido por un único criterio (el criterio i), en oposición al término “relación global” que será el orden definido por el conjunto de criterios (por la “agregación de los criterios”). No hay que confundir esta definición de “relación parcial” con la terminología usual de la matemática que denomina “relación parcial” a la relación que no satisface la completitud, es decir, a la relación que admite la incomparabilidad. El sentido del término “parcial” quedará claro en el contexto.

Operador de agregación

El AMC puede expresarse en términos matemáticos a través del llamado funcional u operador o regla de agregación de los órdenes parciales R_i . Describamos el funcional \mathcal{H} .

Sean $\mathfrak{R} = \{R : R \subset X^2, \mathcal{P}_i(R)\}$ y $\mathfrak{P} = \{\mathcal{R} : \mathcal{R} \subset X^2, \mathcal{P}(\mathcal{R})\}$, dos conjuntos de relaciones definidas sobre el conjunto de alternativas X , donde el conjunto de propiedades \mathcal{P}_i y \mathcal{P} establecen las características de las relaciones parciales R_i y la relación agregada \mathcal{R} . El funcional u operador o regla de agregación \mathcal{H} de los n órdenes parciales $R_i \in \mathfrak{R}$ que determinan la relación o preferencia global agregada $\mathcal{R} \in \mathfrak{P}$ es una función:

$$\mathcal{H}: \quad \mathfrak{R}^n \quad \longrightarrow \quad \mathfrak{P}$$

$$(R_1, R_2, \dots, R_n) \longmapsto \mathcal{R}.$$

¹Por “tipo de relación de orden” queremos decir una relación de orden, un preorden o un semiorden total. Estos órdenes podrían ser incluso difusos.

Siguiendo a Munda y Nardo (Munda y Nardo, 2005: 7), en los modelos o métodos multicriterio que se fundamentan en la comparación por pares de alternativas, el operador \mathcal{H} se descompone en dos procesos diferenciados². El primero, hasta la determinación de la o las matrices de comparación por pares; el segundo, corresponde a la comparación global de las alternativas. Por ejemplo, en el modelo multicriterio Quipu (Burbano, 2014), las matrices de comparación por pares corresponden a las relaciones difusas: $I(\sim)$ **indiferencia**, $P(\succ)$ **preferencia estricta** y $J(\phi)$ **incomparabilidad**, las cuales se determinan a partir de una **preferencia débil** $R(\succeq)$ ³.

En el Quipu, el primer proceso concluye con la comparación preliminar de las alternativas mediante la evaluación de la denominada “relación o matriz de Copeland” $R^* = (R_0, Gr)$, que no es sino la selección, para cada par de alternativas $x, y \in X$, de la relación $I(x, y)$, $P(x, y)$, $P(-1)(x, y)$ o $J(x, y)$ con el mayor grado de credibilidad. R_0 es el símbolo de la relación de mayor credibilidad y Gr es el grado de la relación. La relación de Copeland expresa la relación estructural entre las alternativas, describe el mundo tal como es, complejo y, en ocasiones, incluso contradictorio. En este caso, el conjunto de llegada es \mathcal{C} , el conjunto de relaciones difusas definidas sobre X , sin ninguna restricción a priori. El esquema general de Quipu es:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \mathcal{F} & & \mathcal{G}_1 & & \mathcal{G}_2 \\
 \mathcal{H}: \mathfrak{M}^n & \longrightarrow & \mathfrak{M} & \longrightarrow & \mathfrak{M}_1 \times \mathfrak{M}_2 \times \mathfrak{M}_3 & \longrightarrow & \mathfrak{P} & \mathcal{H} = \mathcal{G} \circ \mathcal{F}, \mathcal{G} = \mathcal{G}_2 \circ \mathcal{G}_1 \\
 (R_1, R_2, \dots, R_n) & \longmapsto & & & R \mapsto (I, P, J) & \longmapsto & \mathcal{R} \\
 & & & & \mathcal{C} \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & \mathcal{C} & & R^* = (R_0, Gr)
 \end{array}$$

Comparación débil de valores

Al considerar múltiples dimensiones y actores sociales se abre la posibilidad de evaluaciones contradictorias de una problemática tanto desde una perspectiva técnica como social. La primera hace referencia a resultados contrapuestos en la evaluación de diferentes criterios. Por ejemplo, el proyecto de construcción de una carretera podría ser valorado muy positivamente desde la perspectiva del empleo y la reducción de costos de transporte, pero podría tener evaluaciones ambientales negativas porque, digamos, atraviesa una zona de alta sensibilidad ambiental como una reserva natural. A esto es lo que Giuseppe Munda (Munda, 2004: 665) denomina “incomensurabilidad técnica”. El segundo tipo de evaluación contradictoria, denominada “incomensurabilidad social” (Munda, 2004: 666), aparecería por ejemplo cuando el proyecto hipotético de la carretera esté apoyado por el sector empresarial, pero sea muy cuestionado por grupos ambientalistas y comunidades asentadas en la reserva natural.

A partir de los conceptos sobre comensurabilidad de Martínez-Alier, Munda y O’Neill (Martínez-Alier et al, 1998), Falconí y Burbano (Falconí y Burbano, 2004: 14) presentan un resumen, el cual se lo ha reelaborado ligeramente:

²En los métodos multicriterio que no tienen esta base, como los métodos basados en la utilidad multicriterio, no se aplica esta descomposición.

³En el análisis multicriterio las expresiones comunes para las distintas relaciones son: $R(\succeq)$ “al menos tan buena como”, $P(\succ)$ “mejor”. La relación inversa de R se define por: $xR(-1)y$ si y solo si yRx , se nota con el símbolo \preceq y corresponde a la expresión “ y es al menos tan buena como x ”. De igual manera, se define la preferencia inversa $P(-1)(\prec)$, “peor”: $x \prec y$ si y solo si $y \succ x$.

Commensurabilidad o comparabilidad fuerte: Ocurre cuando los objetos pueden ser comparados gracias a la existencia de una escala de medida común. Por ejemplo, en la teoría microeconómica los objetos pueden ser comparados por la *utilidad* que de estos derivan los consumidores. En una institución de educación, los alumnos son evaluados por *el promedio de sus calificaciones*.

Commensurabilidad fuerte: Se asume que existe una propiedad singular que todos los objetos la poseen y que es el origen de su valor y una medida cardinal que indica la cantidad, intensidad o grado en que la propiedad está presente. En temas económicos, sociales y ambientales, para la economía convencional la escala de medida común es el dinero. En el ámbito educativo, podríamos decir, por ejemplo, que el alumno Pedro con un promedio de 8,0 es mejor estudiante que Juan que tiene promedio 7,0.

Commensurabilidad débil: Es una condición más débil que la anterior. La escala común de medida es únicamente ordinal. En la microeconomía la modelización de las preferencias del consumidor es ordinal⁴. En el ejemplo de la educación, podríamos conocer que Pedro es primero y Juan es segundo, aunque ignoremos cuál es la “distancia” entre Pedro y Juan.

Incommensurabilidad o comparabilidad débil: El punto de partida en la consideración de que hay una pluralidad de valores; es decir, muchos criterios de comparación que sólo nos permiten ordenar las opciones al elegir un determinado criterio. El conflicto de valor irreductible es inevitable pero compatible con una opción racional utilizando un cálculo práctico. Pedro es músico y matemático, Juan es atleta e historiador. ¿Es Pedro mejor que Juan o es Juan mejor que Pedro?

Incommensurabilidad de valores: Las diferentes concepciones del valor vuelven incomparables a los objetos: para el gremio de músicos Pedro será mejor que Juan, para los historiadores lo será Juan. Los criterios de comparación son variados, con escalas de valor diferentes.

Al apelar a distintos criterios, el resultado frecuentemente es que hay evaluaciones conflictivas de un mismo objeto. Esto es parte esencial de la filosofía del análisis multicriterio.

Otro concepto adicional, relacionado con la commensurabilidad, es la noción de compensación entre criterios.

Compensación

Martínez-Alier, Munda y O'Neill nos aportan la noción intuitiva de compensación en la siguiente manera:

⁴Las preferencias ordinales adquieren un carácter cardinal cuando se introduce el dinero. La “disposición a pagar” expresa la intensidad de las preferencias.

Intuitivamente, compensabilidad se refiere a la existencia de intercambios, es decir, la posibilidad de compensar una desventaja en algún atributo por una ventaja suficientemente grande en otro atributo, mientras que pequeñas ventajas no harían lo mismo. Así, una relación de preferencia es no compensatoria si no hay resarcimiento; y si se produce lo contrario, es compensatoria (Martínez-Alier et al, 1998: 283).

De acuerdo a esta definición, el concepto de compensación o de relación de preferencia compensatoria se refiere a suplir desventajas en ciertos atributos por ventajas *suficientemente grandes* en otros atributos. Si la desventaja es grande, posiblemente no sea posible compensarla.

Refiriéndose al concepto jurídico de compensación, García citando a Gutiérrez y González (Gutiérrez y González, 1984: 879 citado por García 2012: 106) indica que “la palabra compensar deriva del vocablo latino *compensatio*, que se formó con los términos *pensare cum*, que significa ‘pensar con’ que denota la acción de balancear una deuda con otra”⁵.

El significado de compensar tiene dos sentidos: el primero como reversión de la preferencia; es decir, al compensar las desventajas de y respecto de x , la preferencia $x \succ y$ cambia a $y \succ x$; y el segundo como balance de las desventajas: $x \succ y$ cambia a $y \sim x$.

En este punto tal vez cabría preguntarse si “el mundo” es compensatorio. La respuesta sería que la pregunta está equivocada. Lo correcto sería preguntarse ¿qué opinan los economistas (y los no economistas) sobre de la compensación? La respuesta es que hay desacuerdos, en muchas ocasiones radicales. Por ejemplo, respecto a la sustitución entre capital natural y capital artificial —el capital hecho por los humanos—, los economistas más apegados a “la corriente principal” consideran que un sistema económico es sustentable siempre que la “suma” de los capitales natural y artificial permanezca constante (sustentabilidad débil); dicho de otro modo, asumen que un tipo capital compensa al otro. Los economistas más cercanos a la economía ecológica “dan una especial importancia al capital natural y requieren que el stock de ambos tipos de capital el natural y el hecho por los humanos se mantengan”(Adams 1990: 144) (sustentabilidad fuerte). Esta importancia especial radica en la consideración de que hay funciones ambientales críticas que no pueden ser remplazadas por el capital artificial, así existe un nivel mínimo crítico de capital natural por debajo del cual la humanidad no dispondrá de los servicios ecosistémicos necesarios para su supervivencia (England, 2000), de ahí que el mantenimiento del capital natural crítico sea esencial para la sostenibilidad ambiental. Es decir, asumen que la compensación es, al menos, limitada.

Si la compensación no es una propiedad ontológica de la realidad sino que responde a la visión de mundo de los individuos, la compensación entre criterios debería tener el mismo tratamiento que la determinación de los pesos de los criterios; es decir, los actores sociales en procesos democráticos participativos, como lo propugna la Evaluación Social Multicriterio, establecerían cuáles son los grados de compensación entre criterios.

⁵El balance, los dos brazos de la balanza a una misma altura, ocurrirá en la “compensación total” (ver más adelante).

Clasificación de los métodos multicriterio

Hay varias posibilidades de clasificar los métodos multicriterio. Por ejemplo, podríamos clasificarlos de acuerdo al grado de compensación, al tipo de información que utilizan, al tipo de resultados. En cualquier caso, las fronteras entre los métodos multicriterio tienen intersecciones muy amplias por lo que cualquier taxonomía tendrá sus dificultades. En este documento establecemos la siguiente clasificación:

- Métodos ordinales (Condorcet, Borda, Copeland, etcétera).
- Métodos basados en la utilidad multiatributo (MAUT, AHP, etcétera). Son métodos compensatorios en un contexto de conmensurabilidad.
- Métodos de superación (ELECTRE, PROMETHEE, EVAMIX, REGIME, etcétera). Son métodos parcialmente compensatorios; sin embargo, no hay un parámetro explícito para la compensación.
- Otros métodos (TOPSIS, NAIADE y otros). TOPSIS es un método conmensurable y por tanto compensatorio, con un parámetro explícito de compensación.

2 Conceptos Básicos del Análisis Multicriterio

Iniciaremos con breve revisión de los conceptos básicos del análisis multicriterio⁶.

Alternativas

Son los objetos a analizar y/o comparar. Los objetos pueden ser diversos, por ejemplo: proyectos de infraestructura a ser construidos para afrontar una necesidad como un aeropuerto, un sistema de captación y potabilización de agua, etcétera; candidatos en un proceso electoral; aspirantes a una posición en una empresa; un conjunto de países en un estudio de sustentabilidad; periodos o intervalos de tiempo (años, etcétera) de un mismo país, una ciudad o región en un análisis temporal; etcétera.

Criterios de evaluación

Los criterios son los medios para la evaluación de las alternativas. Hemos visto que cada criterio se asocia a una función que describe el comportamiento de las alternativas en el contexto definido por el criterio.

En una manera más conceptual, los criterios son definiciones un tanto más específicas del objetivo general. Por ejemplo, para garantizar el uso sustentable del agua uno de los criterios podría ser el mantenimiento del caudal de las fuentes de abastecimiento. Un criterio puede tener varios indicadores asociados; un indicador es una variable que tiene una medida específica. En el caso del mantenimiento del caudal de las fuentes, los indicadores podrían ser: cobertura forestal de la fuente, flujo de agua de la fuente, volumen consumido, etcétera.

⁶Los conceptos se han elaborado en base a diferentes documentos: (Munda, 1998), (Department for Communities and Local Government, 2009), (Romero, 1996).

Vamos a asumir que cada criterio se asocia con un único indicador. Los criterios también se denominan atributos, indicadores o variables.

Evaluación de las alternativas en los criterios

La sección central de la matriz de impacto es la matriz $M = (x_{ij})$ con $x_{ij} = f_j(x_i)$, esto es, la evaluación de la alternativa x_i según el criterio f_j .

De acuerdo a esta matriz, la alternativa x_i se puede identificar con su vector imagen $f(x_i) = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in}) \in \mathbb{R}^n$. La función f es la función vectorial $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$. Cuando no se utiliza el subíndice i , se escribe $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. De esta manera el conjunto de alternativas X es un subconjunto del espacio vectorial \mathbb{R}^n . Más aún, se puede tomar al espacio vectorial \mathbb{R}^n como el conjunto de alternativas $X = \mathbb{R}^n$.

Ejemplo 1. Supongamos que deseamos analizar y evaluar el grado de desarrollo de tres países andinos: Ecuador, Colombia y Perú, a partir de tres criterios de evaluación: económico: PNB pc (Producto Nacional Bruto per cápita en \$ PPP, año 2010); ambiental: CO₂ (emisiones de CO₂ per cápita en kilogramos, año 2009); y social: Ingr10 (% del ingreso recibido por 10 % de la población más rica, año 2009).

Matriz No. 2 – Matriz de Impacto (sección central)

		Criterios		
		PIB	CO ₂	Ingr10 %
Alternativas	Ecuador	7,830	2,11	38,28
	Colombia	9,000	2,28	44,98
	Perú	8,790	1,53	36,78

Fuente : WorldDevelopmentIndicators

Unidades

Los criterios están expresados en unidades específicas; en el ejemplo anterior, las unidades son: PIB: dólares de los Estados Unidos PPP, Emisiones de CO₂: toneladas, Ingreso del 10 % más rico: porcentaje.

Dirección u objetivo

Los criterios tienen una dirección u objetivo: de maximización cuando “se prefiere más a menos” o cuando “más es mejor”; de ocurrir así, se dirá que el criterio es positivo; o de minimización, si “se prefiere menos a más” o cuando “menos es mejor”, y, en este caso, diremos que el criterio es negativo.

Si la dirección u objetivo del i -ésimo criterio es maximizar, se toma $o_i = 1$; si el objetivo es minimizar, $o_i = -1$. El criterio negativo f_i se puede transformar en positivo multiplicando f_i por -1 . De esta manera, si es necesario, se puede asumir que todos los criterios son positivos.

En algunos casos, el punto óptimo de un criterio no es ni el valor mínimo ni el máximo. Por ejemplo, en la disponibilidad de agua potable para consumo humano, lo mejor o lo deseable es un nivel de consumo que satisfaga las necesidades humanas y sociales y que no implique el derroche de este bien escaso.

Pesos o ponderaciones

Citemos a Gamboa y Munda (Gamboa y Munda, 2007: 1575) quienes precisan el concepto de los pesos o ponderaciones de los criterios.

Los pesos pueden ser pesos compensación o pesos importancia. Los primeros muestran la intensidad de la preferencia e indican cuanto de una ventaja en un criterio es suficiente para compensar una desventaja en otros criterios (por ejemplo, uno podría estar dispuesto a aceptar algún impacto ambiental si se compensa con un ingreso económico suficientemente alto). Los segundos indican la importancia de un criterio sin referirse a una compensación mediante otro criterio. Estos últimos se utilizan con criterios ordinales y originan los procedimientos de agregación no compensatorios. En la evaluación multicriterio social EMS, es más apropiado utilizar el segundo tipo de pesos debido a que la compensabilidad podría conducir a ignorar algunas dimensiones, que podrían ser importantes para algunos actores sociales.

Los pesos importancia son aquellos que denotan la importancia intrínseca de un criterio, que no depende de la escala (o las unidades) utilizada para su evaluación (por ejemplo, los pesos usados en los métodos ELECTRE y PROMETHEE) (Roy y Mosseau, 1996). Es la importancia que le asignaría espontáneamente una persona, sin conocer el rango de la escala o las unidades usadas para medir el criterio en cuestión. Por otro lado, están los pesos compensación. Estos son contingentes, es decir, una persona debe pensar y expresar sus preferencias en referencia al rango o las unidades utilizadas; y así poder definir las tasas de sustitución entre criterios (Figueira y Roy, 2002).

Al ser el modelo Quipu un modelo paramétrico compensatorio no-compensatorio, los pesos son importancia o compensación según el valor de los parámetros de compensación. Son pesos importancia cuando no hay compensación entre criterios y son pesos compensación cuando se asume compensación total entre los criterios. En cualquier caso, mientras más importante un criterio mayor ponderación.

En la matriz de impacto, el peso del criterio i es el número $\omega_i > 0$. Un requisito del modelo Quipu es que la suma de los pesos de los criterios debe ser igual a 1 ($\sum \omega_i = 1$)⁷.

Umbrales de indiferencia y funciones de credibilidad

Los datos de la matriz de impacto generalmente están en magnitudes no comparables; por ello, en algunos métodos multicriterio (por ejemplo TOPSIS), el primer paso

⁷Para facilitar al usuario, los pesos pueden ser expresados de manera que no sumen 1. Internamente un sistema informático los multiplica por la constante adecuada para que se cumpla la condición.

es “normalizar la matriz de decisión” (García, 2009: 104); es decir, poner los indicadores en escalas comparables. En TOPSIS, en cada variable, se aplica una transformación lineal que asigna el valor 0 al peor dato y el valor 1 al mejor. Otros métodos multicriterio se fundamentan en las preferencias parciales que se pueden representar mediante una función de credibilidad. Hay varios modelos de preferencia para comparar las alternativas. Veamos algunos de estos.

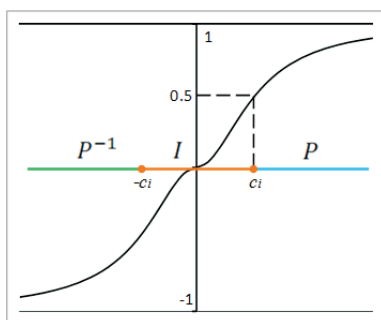
Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$ dos alternativas. Asumamos que los objetivos son de maximización. Consideremos la preferencia parcial R_i definida por:

1. Modelo usual (criterio):
$$\begin{cases} f_{P_i}(x, y) = 1 & \text{ssi } x_i > y_i, \\ f_{I_i}(x, y) = 1 & \text{ssi } x_i = y_i \end{cases}$$
2. Modelo de umbral (semi-criterio):
$$\begin{cases} f_{P_i}(x, y) = 1 & \text{ssi } x_i > y_i + c_i, \\ f_{I_i}(x, y) = 1 & \text{ssi } |x_i - y_i| < c_i \end{cases}$$
3. Criterio difuso:
$$\begin{cases} P_i(x, y) = h_{c_i}(x_i, y_i) & \text{si } x_i \geq y_i, \\ P_i(y, x) = -h_{c_i}(x_i, y_i) & \text{si } y_i \geq x_i, \text{ donde } h_{c_i} \text{ es la función:} \\ I_i(x, y) = 1 - |P_i(x, y)|, \end{cases}$$

$$h_{c_i}(x_i, y_i) = h_{c_i}(d_i) = \frac{(d_i/c_i)^\eta}{1 + (d_i/c_i)^\eta}, \quad \eta \geq 1, \quad d_i = x_i - y_i.$$

El criterio difuso define un grado de credibilidad de las relaciones xP_iy , xI_iy ; que se nota $P_i(x, y)$ e $I_i(x, y)$, respectivamente. Si $d_i > 0$, credibilidad(xP_iy) = $h_{c_i}(d_i)$; si $d_i < 0$, credibilidad(yP_ix) = $-h_{c_i}(d_i)$; credibilidad(xI_iy) = $1 - |h_{c_i}(d_i)|$. Notemos que si $d_i = c_i$, $h_{c_i}(d_i) = 1/2$; y por tanto, $P_i(x, y) = I_i(x, y) = 1/2$. El punto $d_i = c_i$ marca el cambio de la indiferencia a la preferencia estricta.

Gráfico No. 1 – Función de credibilidad



El umbral de indiferencia $c_i > 0$ significa que diferencias menores o iguales a c_i no se las considera relevantes (para decidir que una alternativa es mejor que la otra); mientras más pequeñas menos importantes. Por ejemplo, si estamos interesados en comprar un auto y dos vehículos tienen precios de \$20 000 y \$20 100, es razonable que la diferencia de \$100 no incida en la decisión de compra; pero si el precio más

alto es de \$25 000 o \$30 000, la diferencia en precio seguramente va a afectar en la decisión final.

Se cumple que: si $c_i \geq 0$, el modelo difuso converge al modelo usual; si $\eta \rightarrow \infty$, el modelo difuso converge al modelo con umbral de indiferencia.

Observación. Previo a la aplicación de la función de credibilidad es posible aplicar una transformación de la variable. En particular, la transformación logarítmica define umbrales porcentuales y se recomienda su uso en variables “no acotadas”⁸.

Ejemplo 2. Consideremos dos pares de valores reales sin y con la transformación logarítmica y los umbrales 1 y 10 %, respectivamente.

	$c_i = 1$	$c_i = \ln(1 + 0,1) = 0,0953$		
	1	2	$\ln(1)$	$\ln(2)$
(x_i, y_i)	(11;10)	(110;100)	(2,398;2,303)	(4,700;4,605)
$d_i = x_i - y_i$	1	10	0,095	0,095
$h(d_i)$	0,5	0,99	0,5	0,5

Escalas comparables

Si $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ es una alternativa y $\mathit{mathcal{C}} = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ son los umbrales de indiferencia, el vector $x' = x/c = (x_1/c_1, x_2/c_2, \dots, x_n/c_n) \in \mathbb{R}^n$ es la alternativa expresada en “escalas comparables”. Los criterios de la alternativa x están expresados en la misma unidad: “umbrales de indiferencia” [u.i.]. Notemos que cuando las variables están en escalas comparables, el umbral de indiferencia es 1.

Ejemplo 3. Para los indicadores de la matriz de impacto del ejemplo 1, digamos que los umbrales de indiferencia son: PIB, 1 000 \$PPP; emisiones de CO₂, 0,2t; ingreso 10 % más rico, 5 %. La matriz de impacto en escalas comparables es:

Matriz No. 3 – Matriz de Impacto en escalas comparables

Criterios				
		PIB	CO ₂	Ingr10 %
Alternativas	Ecuador	7,83	10,55	7,66
	Colombia	9,00	11,40	9,00
	Perú	8,79	7,65	7,36

El PIB del Ecuador es 7,83 [u.i.]. Para ser más precisos, 7,83 [u.i. del PIB]; como el u.i. del PIB es 1,000 \$PPP, el PIB es 7,830 \$PPP.

⁸Una variable “acotada” es una variable que varía en un intervalo real acotado; por ejemplo, un porcentaje, la calificación académica de un examen, etcétera. Una variable “no acotada” es una variable que en principio no está limitada (superiormente o inferiormente); por ejemplo el PIB, las emisiones de CO₂, etcétera.

Observación. Para cualquier objetivo del criterio, la función de credibilidad se expresa en escalas comparables por:

$$h_{c_i}(d_i) = \text{sig}(d_i) \frac{(d_i/c_i)^2}{1 + (d_i/c_i)^2} = \text{sig}(d_i) \frac{(x'_i - y'_i)^2}{1 + (x'_i - y'_i)^2}$$

con: $d_i = o_i(x_i - y_i)$, $x'_i = x_i/c_i$, $y'_i = y_i/c_i$.

Nota. Si los criterios están en escalas comparables no significa que se puedan comparar entre coordenadas. Esto último depende de si hay o no compensación entre los criterios. El término preciso debería ser “escalas potencialmente comparables”.

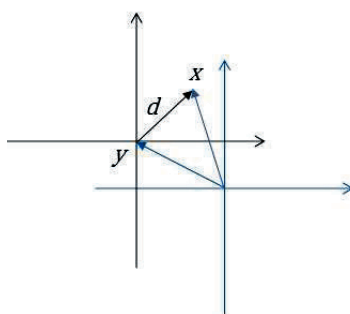
Vector diferencia

Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$ dos alternativas cualesquiera. El vector diferencia $d \in \mathbb{R}^n$, es el vector $d = o(x - y)$, donde $d = (d_1, d_2, \dots, d_n)$ con $d_i = o_i(x_i - y_i)$ (o_i es el objetivo del criterio i). El espacio vectorial \mathbb{R}^n como conjunto que contiene a los vectores d se denomina “espacio d ” o “espacio de alternativas”.

Notemos que al multiplicar o_i por $(x_i - y_i)$, el resultado es transformar la dirección u objetivo del criterio i a maximización⁹.

La función de credibilidad vectorial $h = (h_{c_1}, h_{c_2}, \dots, h_{c_n})$ con el vector de umbrales de indiferencia $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ se aplica al vector diferencia d y lo transforma en el vector r . El conjunto $[-1, 1]^n$ que contiene a los vectores r se denomina “espacio r ” o “espacio de decisión”. Para graficar el vector diferencia $d = o(x - y)$, se grafican los vectores x, y en el espacio afín (\mathbb{R}^n, y) , el espacio vectorial \mathbb{R}^n con el origen trasladado al punto y .

Gráfico No. 2 – Vector Diferencia



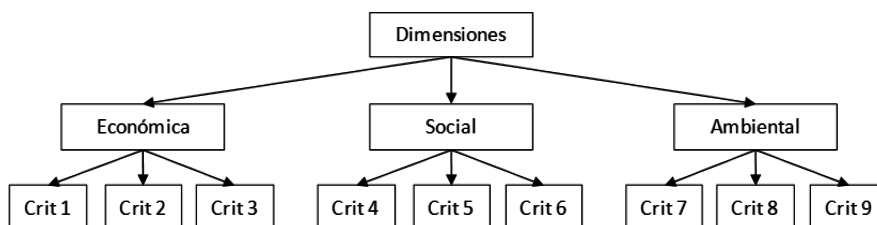
Dimensiones de análisis

En un análisis multicriterio, es común considerar varias dimensiones de análisis, económica, social y ambiental, etcétera. De manera natural los criterios se agrupan

⁹Si la dirección u objetivo inicial del criterio i fue de maximización, $o_i = 1$ y no cambia nada.

en estas dimensiones¹⁰. La agrupación de los criterios en las k dimensiones se describe mediante la partición $\{F_1, F_2, \dots, F_k\}$. La dimensión F_j (para $1 \leq j \leq k$) es una agrupación de criterios: $F_j = \{f_{j_1}, f_{j_2}, \dots, f_{j_s}\}$. Un grafo de árbol deja en claro la relación entre las dimensiones y los criterios que las conforman:

Diagrama No. 2 - Árbol de criterios



Esta estructura es similar a los niveles jerárquicos del método AHP (Analytic Hierarchy Process) de Saaty, aunque la nomenclatura es diferente. Los “criterios” del AHP son los dimensiones y los “subcriterios” del AHP corresponden a los aquí denominados atributos o criterios.

Parámetros de Compensación

De manera general el parámetro de compensación α es un número entre 0 y 1, que nos indica si hay compensación total ($\alpha = 1$), parcial ($0 < \alpha < 1$) o no hay compensación ($\alpha = 0$). Cuando los criterios están agrupados en dimensiones, se define el grado de compensación global α_0 , es decir, el grado de compensación entre las dimensiones y los grados de compensación intradimensión $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k\}$. El primero mide, por ejemplo, en qué medida una desventaja en el conjunto de criterios ambientales se compensa con una ventaja en el conjunto de criterios económicos; el segundo mide, por ejemplo, cuánto de una desventaja en un criterio ambiental se compensa con una ventaja en otro criterio ambiental.

Los parámetros de compensación global α_0 y local (intradimensional) $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k\}$ no se utilizan otros métodos multicriterio, son únicos para el modelo multicriterio de Burbano.

3 Quipu: Modelo paramétrico compensatorio no-compensatorio

El modelo multicriterio paramétrico compensatorio no-compensatorio Quipu desarrollado por el Rafael Burbano como tesis del programa de Doctorado en Economía del Desarrollo en la Facultad Latinoamericana de Ciencias Sociales – Sede Ecuador es un método de evaluación multicriterio que permite la comparación de las alternativas de decisión a partir de criterios numéricos, difusos, estocásticos o cualitativos. El resultado de la evaluación es la relación de Copelan o un semiorden difuso de

¹⁰Otros sinónimos para “dimensión” son: aspectos, ejes, aristas, espacios, temas, temáticas, etcétera.

las alternativas. El proceso estándar del modelo Quipu es realizar un análisis de sensibilidad, por ello los resultados pueden expresarse mediante distribuciones de probabilidad empírica. Las características generales del modelo son:

	Modelo Quipu
Datos	Numéricos, difusos, variables aleatorias, cualitativos
Pesos	Explícitos
Procesos	Comparación por pares, Copeland, agregación global
Umbral	De indiferencia
Relación parcial	Criterio difuso
Comparación por pares	Preferencia débil, Indiferencia, preferencia estricta e incomparabilidad
Comparación global	Condorcet y flujo neto (Borda)
Compensación	Explícita (global y local)
Análisis de sensibilidad	Simulación Montecarlo, análisis parcial por dimensión

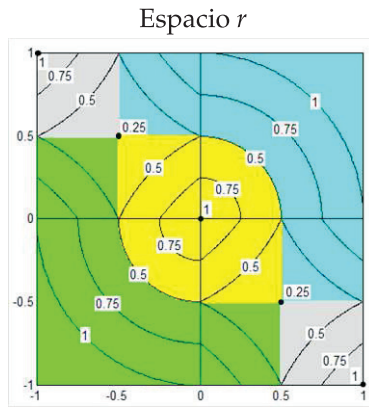
El modelo queda determinado al definir las relaciones R_i y los operadores \mathcal{F} , \mathcal{G}_1 , \mathcal{G}_2 y \mathcal{C} (ver Burbano 2014).

Representación gráfica del modelo Quipu

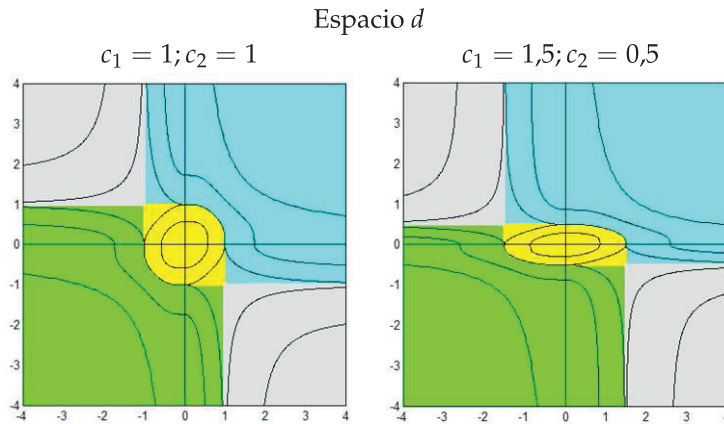
El modelo Quipu puede entenderse a partir de la representación gráfica de las regiones \sim , \succ , \prec , ϕ y las curvas de nivel. Las regiones y curvas se pueden graficar en los espacios r y d . En el espacio d el gráfico es la pre-imagen del gráfico en el espacio r por la transformación inversa h^{-1} con valores específicos para los umbrales de indiferencia. La compensación se establece según el valor del parámetro de compensación α . También puede establecerse según el valor de la indiferencia I o la incomparabilidad J en el "punto ITC (Información Totalmente Contradictoria)"¹¹, esto es en $r = (-1, \dots, -1, 1, \dots, 1)$ el vector con exactamente $n/2$ coordenadas iguales a 1 y $n/2$ coordenadas iguales a -1 . Lo notaremos $r = (-1, 1)$. Este vector puede interpretarse como que a partir de $x = y$, que implica $I(x, y) = 1$, $J(x, y) = 0$, a la alternativa x se le disminuye la cantidad $o_i \infty$ en $n/2$ criterios y , en compensación, se le incrementa la magnitud $o_j \infty$ en algunos otros $n/2$ criterios. El modelo es: no compensatorio cuando $\alpha = 0$ ($I(x, y) = 0$, $J(-1, 1) = 1$), parcialmente compensatorio si $0 < \alpha < 1$ ($0 < I(-1, 1)$, $J(-1, 1) < 1$), y totalmente compensatorio cuando $\alpha = 1$ ($I(-1, 1) = 1$, $J(-1, 1) = 0$).

¹¹Para que la información sea totalmente contradictoria n , el número de criterios, debe ser par.

Gráfico No. 3 – Modelo no compensatorio ($\alpha = 0$)



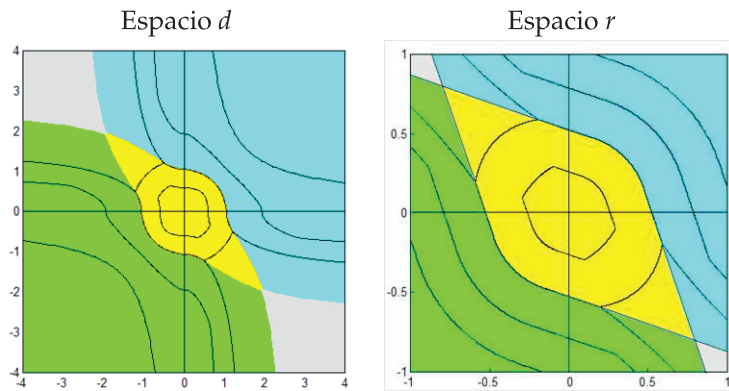
Colores: Amarillo: $I(\sim)$, celeste: $P(\succ)$, verde: $P^{-1}(\prec)$, gris: $J(\phi)$.



En el Modelo parcialmente compensatorio se presentan dos casos: limitado e ilimitado. La compensación parcial limitada ocurre cuando $0 < \alpha < 0,5$; en tanto que la compensación parcial ilimitada se produce si $0,5 \leq \alpha < 1$.

- a) Compensación parcial limitada: $0 < \alpha < 0,5 \Leftrightarrow 0 < I(-1,1) < J(-1,1) < 1$

Gráfico No. 4 – Compensación parcial limitada ($\alpha = 0,4$)



b) Compensación parcial ilimitada: $0,5 \leq \alpha < 1 \Leftrightarrow 0 < J(-1,1) \leq I(-1,1) < 1$

Gráfico No. 5 – Compensación parcial ilimitada ($\alpha = 0,6$)

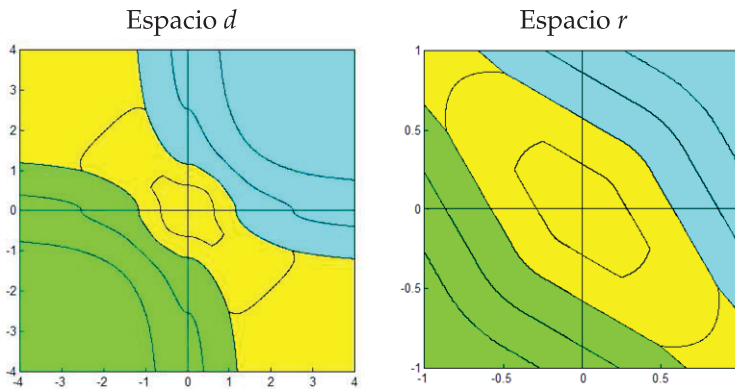
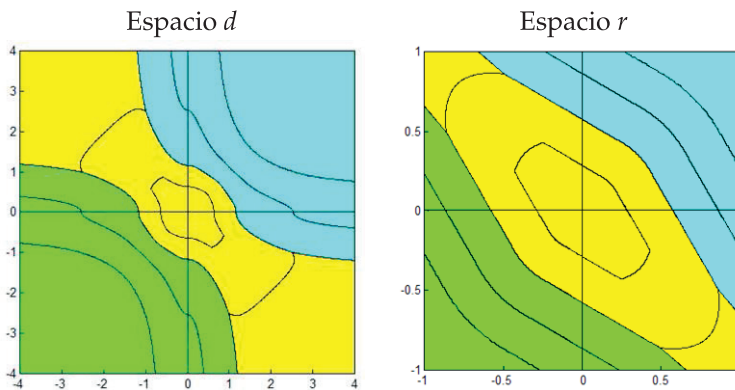


Gráfico No. 6 - Modelo totalmente compensatorio ($\alpha = 1$)



4 Un ejemplo de aplicación

Como ejemplo de aplicación consideremos el análisis propuesto por Ivonne Puruncajas como parte de su tesis del programa de Maestría en Economía del Desarrollo en FLACSO Sede-Ecuador.

La comunidad Shuar San Miguel de Kuri ubicada en la Provincia de Morona Santiago, presenta un grave problema que es la alta tasa de tala de árboles. La actividad de tala tiene como consecuencia la pérdida de biodiversidad de la zona, lo que conlleva problemas de salud, migración, etc. Es decir problemas en los aspectos: social, económico, ambiental y cultural. Para el estudio se realiza un análisis multicriterio, para lo cual se plantea tres alternativas de desarrollo: ganadería, agrosilvopastura y ecoturismo comunitario. Para las mencionadas alternativas se han escogido los siguientes criterios: en el aspecto económico; Inversión inicial para implementación de la alternativa, Ingresos netos a la comunidad, Generación de ingresos adicionales en función del tiempo; en el aspecto ambiental: Contaminación del suelo por humanos, Deforestación, Emisiones de CO₂, Captación de Carbono, Especies en la zona, Calidad del paisaje ; en el aspecto social: Alimentos proporcionados por el bosque, Generación de empleo directo e indirecto, Emigración por trabajo, Integración del grupo familiar en el trabajo comunitario; y en el aspecto cultural, la conservación de la identidad de la comunidad.

La matriz de impacto es:

Matriz No. 4 – Matriz de impacto San Miguel de Kuri

Criterio	Inversión*	Ingreso neto*	Tiempo
Unidad	miles USD \$	miles USD \$	Años
Objetivo	mín	máx	mín
Umbral	0,182	0,182	2
Peso	0,092	0,092	0,092
Dimensión	Económica		
Compen, local	0,6		
Compen, global	0,3		
Situación Actual	0,0	13,2	50
Ganadería	205	3.113	1
Agrosilvopastura	26,3	443	15
Ecoturismo comunit	32,1	198	1

Criterio	Contam*	Deforest*	Emis CO ₂ *	Capt Carb*	Especies	Paisaje
Unidad	T	Ha	kt	kt	cuantitativo	cuantitativo
Objetivo	Min	Min	min	max	max	max
Umbral	0,182	0,182	0,182	0,182	0,707	0,707
Peso	0,046	0,046	0,046	0,046	0,046	0,046
Dimensión	Ambiental					
Compen, local	0,5					
Compen, global	0,3					
Situación Actual	1.676	787	35,7	600	Moderadamente baja	Muy buena
Ganadería	2.37	1.5	261,9	350	Extremadamente baja	Muy mala
Agrosilvopastura	1.676	815	70,4	630	Más o menos	Muy buena
Ecoturismo comunitario	6.283	830	65,3	571	Muy alta	Excelente

Criterio	Alimentos	Empleo*	Emigración	Integración	Identidad
Unidad	cuantitativo	personas	cuantitativo	cuantitativo	cuantitativo
Objetivo	max	max	min	max	max
Umbral	0,707	0,182	0,707	0,707	0,707
Peso	0,060	0,060	0,060	0,060	0,207
Dimensión	Social				Cultural
Compen, local	0,4				-
Compen, global	0,3				
Situación Actual	Más o menos	0	Más o menos	Moderadamente alta	Baja
Ganadería	Moderadamente baja	109	Muy baja	Muy baja	Extremadamente baja
Agrosilvopastura	Alta	114	Baja	Alta	Más o menos
Ecoturismo comunitario	Alta	97	Muy baja	Muy alta	Alta

*Para el cálculo, a estas variables se aplica la transformación logarítmica. Fuente: Puruncajas Ivonne (2013)

Observación. Los valores de las variables cualitativas se reemplaza con:

Cuadro No. 1 – Expresiones verbales

Expresión verbal		Número real asociado
Excelente	Extremadamente alta	8
Muy buena	Muy alta	7
Buena	Alta	6
Moderadamente buena	Moderadamente alta	5
Más o menos	Más o menos	4
Moderadamente mala	Moderadamente baja	3
Mala	Baja	2
Muy mala	Muy baja	1
Extremadamente mala	Extremadamente baja	0

El parámetro de la distancia de Minkowsky es: $p = 2$.

Resultados modelo Quipu

Resultados globales: Relación de Copeland

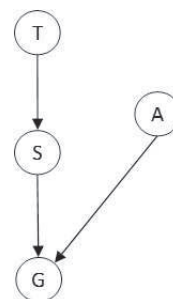
El análisis de sensibilidad ejecuta una simulación de Montecarlo computando 1.000 estimaciones de los resultados. La tabla siguiente presenta los promedios de las simulaciones

Relación de Copeland

Matriz No. 5

R^*	SitAct	Gan	AgrSilv	TurCom
SitAct	1	0,44	0,50	0,48
Gan		1	0,50	0,66
AgrSilv			1	0,35
TurCom				1

Gráfico No. 7



S: Situación actual, T: Ecoturismo comunitario, A: Agrosilvopastura, G: Ganadería

La relación de Copeland R^* es un orden parcial transitivo. Las mejores alternativas son el ecoturismo comunitario y la agrosilvopastura; estas no son comparables. No hay una única mejor alternativa. Si hay un elemento mínimo, la peor alternativa: la ganadería.

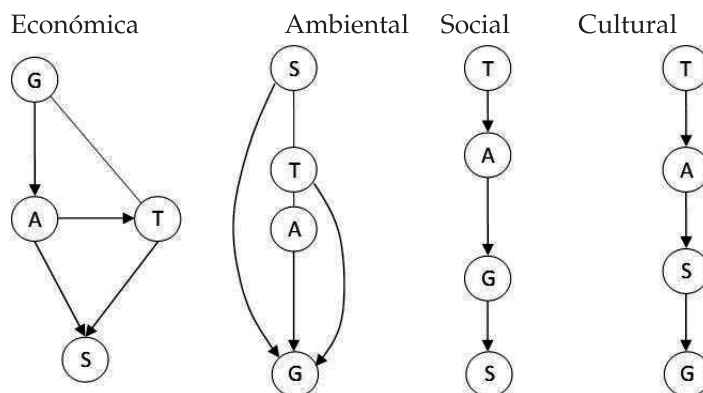
El resultado se explica por el desempeño de las alternativas en cada uno de las dimensiones de análisis. Los rangos de las alternativas en las dimensiones y la relación en los análisis parciales son:

Tabla No. 1 – Rango neto de Condorcet por dimensión

	Económica	Ambiental	Social	Cultural
SitAct	0,47	2,23	0,32	1,00
Ganad	2,27	0,02	0,90	0,01
AgrSilv	1,71	1,87	2,18	2,00
EcoTur	1,55	1,89	2,61	2,99

A excepción de la dimensión económica, en las otras tres dimensiones la relación de Copeland local R^* es un semiorden completo. Los grafos correspondientes son:

Gráfico No. 8 – Dimensiones-Relaciones de Copeland



El Ecoturismo comunitario es la mejor alternativa desde una óptica social y cultural y está en segundo lugar en los aspectos ambientales y es tercero en lo económico. La Agrosilvopastura es la segunda mejor alternativas en las dimensiones económica, social y cultural. Nótese también que el Ecoturismo comunitario está mejor que la Agrosilvopastura en tres de las cuatro dimensiones, ambiental, social y cultural, pero que la Agrosilvopastura está mejor en lo económico.

Ordenamiento global de las alternativas

Los resultados obtenidos del ordenamiento global de las alternativas al aplicar el método de Condorcet son:

Matriz No. 6 – Ordenamiento global

\mathcal{R}	EcoTur	AgrSilv	SitAct	Ganad
EcoTur	1	0,31	0,48	0,66
AgrSilv		1	0,34	0,50
SitAct			1	0,44
Ganad				1

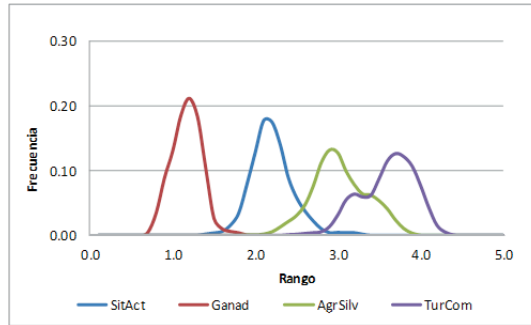
Los rangos globales (de Condorcet) de las alternativas ordenadas son:

Tabla No. 2 – Rangos de Condorcet

	$Rango^+$	$Rango^-$	$Rango$
Ecoturismo comunitario	1,41	0,08	2,16
Agrosilvopastura	0,92	0,29	1,82
Situación Actual	0,46	0,82	1,32
Ganadería	0,00	1,60	0,70

El gráfico de la distribución de la frecuencia relativa de los rangos correspondientes a las alternativas es:

Gráfico No. 9 - Rango de Condorcet, frecuencia relativa



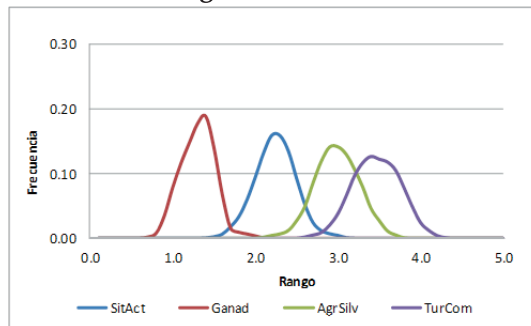
El gráfico deja en claro que las alternativas se ordenan de mejor a peor de la manera siguiente: Ecoturismo comunitario, Agrosilvopastura, Situación actual y Ganadería.

La aplicación del método de Borda presenta resultados similares. Esto denota que los resultados son robustos.

Tabla No. 3 – Rangos de Borda

	$Rango^+$	$Rango^-$	$Rango$
Ecoturismo comunitario	1,45	0,29	2,08
Agrosilvopastura	1,03	0,44	1,79
Situación Actual	0,60	0,91	1,35
Ganadería	0,16	1,60	0,78

Gráfico No. 10 - Rango de Borda - Frecuencia relativa



La conclusión final es que, tomando en consideración la totalidad de criterios de evaluación, agrupados en las 4 dimensiones indicadas, las alternativas se ordenan de manera decreciente en:

Ecoturismo comunitario \succ Agrosilvopastura \succ Situación Actual \succ Ganadería

Hay claras ventajas del Ecoturismo comunitario sobre la Agrosilvopastura, que es la segunda mejor opción. La Situación Actual ocupa el tercer lugar; en tanto que la alternativa de desarrollar la ganadería es la opción menos favorable para la comunidad.

Referencias

- [1] Adams William (1990). Green Development. Environment and sustainability in a developing world. Taylor & Francis e-Library.
- [2] Alsina C. (1985). On a family of connectives for fuzzy set. *Fuzzy Sets and Systems* 16, pp 231-235.
- [3] Banville Claude, Maurice Landry, Jean-Marc Martel andy Christèle Boulaire (1998). A Stakeholder Approach to MCDA. *Systems Research and Behavioral Science*, Vol 15, Issue 1, pp. 15-32.
- [4] Bojórquez-Tapia Luis (2005). Building Consensus in Environmental Impact Assessment Through Multicriteria Modeling and Sensitivity Analysis. *Environmental Management* Vol. 36, No. 3, pp. 469-481
- [5] Bouyssou Denis y Vansnick Jean-Claude (1986). Noncompensatory and generalized noncompensatory preference structures. *Theory and Decision*, 21, 251-266.
- [6] Bouyssou Denis (1986). Some remarks on the notion of compensation in MCDM. *European Journal of Operational Research* 26, 150-160.
- [7] Burbano Rafael (2003). Análisis Multicriterio de la Dolarización Ecuatoriana, FLACSO, Quito. Mimeo.
- [8] Burbano Rafael (2009). Condorcet y Borda: ¿confrontación o diálogo?. Primer Congreso Científico Internacional en Economía y Finanzas. Escuela Politécnica Nacional.
- [9] Burbano Rafael (2014). Modelo Multicriterio Paramétrico Compensatorio No-compensatorio. Tesis de Doctorado (en revisión), FLACSO, Quito.
- [10] Conitzer Vincent y Tuomas Sandholm (2005). Common voting rules as maximum likelihood estimators. UAI.
- [11] <http://www.cs.cmu.edu/~sandholm/MLEvoting.uai05.pdf>
- [12] Choo Eng, Bertram Schoner y William Wedley (1999). Interpretation of criteria weights in multicriteria decision making. *Computers & Industrial Engineering* 37, 527-541.
- [13] Department for Communities and Local Government (2009). Multi-criteria analysis: a manual. Londres. www.communities.gov.uk
- [14] Díez María e Iker Etxano (2008). La Evaluación Social Multi-criterio como alternativa para la evaluación de la política de conservación de la naturaleza. XI Jornadas de Economía Crítica. Bilbao.
- [15] England Richard (2000). Natural capital and the theory of economic growth. *Ecological Economics* 34, pp. 425-431

- [16] Falconí Fander y Rafael Burbano (2004). Instrumentos económicos para la gestión ambiental: decisiones monocriteriales versus decisiones multicriteriales. *Revista Iberoamericana de Economía Ecológica* Vol. 1: 11-20.
- [17] Fernández Barberis Gabriela y María del Carmen Escribano (2011). La Ayuda a la Decisión Multicriterio: orígenes, evolución y situación actual. VI Congreso internacional de historia de la estadística y de la probabilidad.
- [18] http://www.ahepe.es/VICongreso/descargas/Gabriela_Fdz_Barberis.pdf
- [19] Figueira José y Bernard Roy (2002). Determining the weights of criteria in the ELECTRE type methods with a revised Simos' procedure. *European Journal of Operational Research* 139, pp 317-326
- [20] Fishburn Peter (1976). Noncompensatory preferences, *Synthese*, 393-403.
- [21] Fodor János y M. Roubens (1994). Valued preference structures. *European Journal of Operational Research* No. 79, pp. 277-286.
- [22] Fodor János y Bernard de Baets (2008). Fuzzy Preference Modelling: Fundamentals and Recent Advances in Bustince H. et al., (eds.). *Fuzzy Sets and Their Extensions: Representation, Aggregation and Models*.
- [23] Gamboa Gonzalo y Giuseppe Munda (2007). The problem of windfarm location: A social multi-criteria evaluation framework. *Energy Policy* No. 35, pp 1564-1583
- [24] García José (2012). La compensación jurídico-económico-financiera como solución entre la deuda económica ecológica ambiental y la externa.
- [25] García María del Socorro (2009). Métodos para la comparación de alternativas mediante un Sistema de Ayuda a la Decisión (S.A.D.) y "Soft Computing". Tesis Doctoral. Universidad Politécnica De Cartagena.
- [26] Gutiérrez y González Ernesto (1984). *Derecho de las obligaciones*. 5ta ed, México. Cajica.
- [27] Kodikara Prashanthi Nirmala (2008). *Multi-Objective Optimal Operation of Urban Water Supply Systems*. Tesis de Doctorado. Universidad Victoria, Australia.
- [28] Levin Jonathan y Barry Nalebuff (1995). An Introduction to Vote-Counting Schemes. *The Journal of Economic Perspectives*, Volume 9, Issue 1.
- [29] <http://www.stanford.edu/~jdlevin/Papers/Voting.pdf>
- [30] Martínez-Alier J., Munda G. y O'Neill J. (1998). "Weak comparability of values as a foundation for ecological economics". *Ecological Economics*, No. 26, pp. 277-286.
- [31] Monjardet Bernard (1990). Sur diverses formes de la "règle de Condorcet" d'agrégation des préférences. *Mathématiques et Sciences Humaines*, Volume: 111, pg 61-71.

- [32] Munda Giuseppe (2003). Multicriteria Assessment, Internet Encyclopaedia of Ecological Economics, International Society for Ecological Economics.
- [33] Munda Giuseppe (2004). Social multi-criteria evaluation (SMCE): methodological foundations and operational consequences. *European Journal of Operational Research* N.º 158 V3, p 662-677.
- [34] Pomerol Jean-Charles y Sergio Barba-Romero (2000). *Multicriterion Decision in Management: Principles and Practice*. Kluwer Academic Publishers.
- [35] Puruncajas Ivonne (2013). ¿Deforestar para crecer? Un estudio de caso para la comunidad Shuar San Miguel de Kuri desde una perspectiva multicriterial. Tesis de Maestría del Desarrollo (en elaboración), FLACSO.
- [36] Romero Carlos (1993). *Teoría de la decisión multicriterio: conceptos, técnicas y aplicaciones*. Alianza Editorial. Madrid.
- [37] Roy Bernard (1985). *Méthodologie multicritère d'aide à la décision*. Economica. París. Rudas Imre y János Fodor (2009). Fundamentals of fuzzy preference modeling. 8th WSEAS International Conference on Applied Informatics and Communications (AIC'08). Rhodes, Greece.
- [38] Saaty Thomas (1990). How to make a decision: The Analytic Hierarchy Process. *European Journal of Operational Research* 48 (1990) 9-26. North-Holland.
- [39] Vallejo María Cristina, Carlos Larrea, Rafael Burbano y Fander Falconí (2011). La Iniciativa Yasuní-ITT desde una perspectiva multicriterial. Programa de las Naciones Unidas para el Desarrollo PNUD. Quito.
- [40] Van de Walle Bartel, Bernard De Baets y Etienne Kerre (1998). Characterizable fuzzy preference structures. *Annals of Operations Research* 80. 105 -136
- [41] Young Peyton (1988). Condorcet's Theory of Voting, *The American Political Science Review*. Vol. 82, No. 4. *Mathématiques et Sciences Humaines* (1990) Volume: 111, pg 45-59.

Ecuaciones en Derivadas Parciales

Marco Calahorrano Recalde*

Julio 2014

Resumen

En el presente curso daremos algunos teoremas que nos permiten demostrar la existencia de soluciones para ciertas ecuaciones diferenciales parciales de tipo elíptico. Estudiaremos los casos lineales y semilineales principalmente.

1 Introducción

El problema de Dirichlet homogéneo para una ecuación elíptica lineal en un dominio acotado, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, suficientemente regular consiste en encontrar $u : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que verifique:

$$-\Delta u + u = f \quad \text{en } \Omega \quad (1)$$

$$u = 0 \quad \text{en } \partial\Omega \quad (2)$$

donde f es dado.

En el contexto de este cursillo nos interesa la solución débil de este problema, es decir $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla v + uv) dx = \int_{\Omega} f v dx \quad \text{para todo } v \in H_0^1(\Omega) \quad (3)$$

Para responder a esto tenemos el siguiente teorema

TEOREMA 1 (Dirichlet, Riemann, Poincaré, Hilbert). Para cada $f \in L^2(\Omega)$ existe $u \in H_0^1(\Omega)$ única solución débil de (1). Además u se obtiene mediante la resolución del problema

$$\min_{v \in H_0^1(\Omega)} \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|\nabla v|^2 + v^2) - \int_{\Omega} f v \right\} \quad (4)$$

Debemos notar que resolver una ecuación diferencial se ha transformado en encontrar el mínimo del funcional Ψ ,

$$\Psi(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|\nabla v|^2 + v^2) - \int_{\Omega} f v, \quad (5)$$

*Departamento de Matemática de la Escuela Politécnica Nacional

definido en $H_0^1(\Omega)$.

La observación hecha nos lleva al principio de Dirichlet, que en el caso regular podría enunciarse por medio de un teorema:

Dado el problema de valores a la frontera:

$$-\Delta u + u = f \quad \text{en } \Omega \quad (6)$$

$$u = g \quad \text{en } \partial\Omega \quad (7)$$

f, g funciones dadas.

Definido el funcional de energía J por:

$$J(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|\nabla v|^2 + v^2) - \int_{\Omega} f v, \quad (8)$$

con v perteneciente al conjunto admisible

$$\mathcal{A} = \left\{ v \in C^2(\overline{\Omega}) : v = g \quad \text{en } \partial\Omega \right\}, \quad (9)$$

se tiene entonces,

TEOREMA 2 (Principio de Dirichlet). Supongamos que $u \in C^2(\overline{\Omega})$ resuelve (6 - 7). Entonces

$$J(u) = \min_{v \in \mathcal{A}} J(v). \quad (10)$$

Inversamente, si $u \in \mathcal{A}$ satisface (10), entonces u resuelve el problema de valores a la frontera (6 - 7).

NOTA 1. Para probar la existencia y unicidad de soluciones débiles de (6 - 7) se utiliza el teorema de Stampacchia, en cambio, para demostrar el teorema de Dirichlet, Riemann, Poincaré, Hilbert se utiliza el teorema de Lax-Milgram.

NOTA 2. Del principio de Dirichlet vemos que resolver una ecuación diferencial parcial lineal es equivalente a encontrar el mínimo de un funcional de energía sobre un cierto conjunto admisible. En general, podemos pensar que para resolver ecuaciones diferenciales lineales o no lineales podemos encontrar un funcional tal que sus puntos críticos sean soluciones de la ecuación, en algunos casos esos puntos críticos serán mínimos o máximos u otros puntos críticos.

2 Teoremas de Stampacchia y Lax-Milgram

Vamos a presentar teoremas abstractos del análisis funcional que nos permiten resolver algunas ecuaciones diferenciales.

En lo que sigue H denota un espacio de Hilbert con producto escalar $(u|v)$, para $u, v \in H$ y norma $\|u\| = (u|u)^{\frac{1}{2}}$. H' el dual de H . Si $\varphi \in H'$ escribiremos $\langle \varphi, v \rangle$ el valor de φ en $v \in H$.

DEFINICIÓN 1. Se dice que una forma bilineal $\mathbf{a} : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ es **continua** si existe una constante C tal que

$$|\mathbf{a}(u, v)| \leq C|u||v| \quad \forall u, v \in H \quad (11)$$

coerciva si existe una constante $\alpha > 0$ tal que

$$\mathbf{a}(u, u) \geq \alpha|u|^2 \quad \forall u \in H. \quad (12)$$

2.1 Teorema de Lax-Milgram

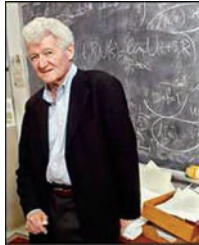
TEOREMA 3 (Lax-Milgram). Sea H un espacio de Hilbert y sea $\mathbf{a} : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal continua y coerciva. Entonces, dado $\varphi \in H'$, existe un único $u \in H$ tal que

$$\mathbf{a}(u, v) = \langle \varphi, v \rangle, \quad \forall v \in H. \quad (13)$$

Además, si \mathbf{a} es simétrica u viene dada por:

$$u \in H, \quad \frac{1}{2}\mathbf{a}(u, u) - \langle \varphi, u \rangle = \min_{v \in H} \left\{ \frac{1}{2}\mathbf{a}(v, v) - \langle \varphi, v \rangle \right\} \quad (14)$$

Peter David Lax (nacido el 1 de mayo de 1926, en Budapest, Hungría) es un matemático que trabaja en áreas de matemática pura y aplicada.



2.2 Teorema de G. Stampacchia

En la demostración del teorema de Lax-Milgram (Arthur Norton Milgram, 3 de junio de 1912 - 30 de enero de 1961, matemático norte americano) utilizaremos la siguiente:

PROPOSICIÓN 1 (Teorema de G. Stampacchia). Sean H un espacio de Hilbert, $K \subset H$ un subconjunto convexo, cerrado y no vacío de H . Sea $\mathbf{a} : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal continua y coerciva. Entonces, dado $\varphi \in H'$ existe un único $u \in K$ tal que:

$$\mathbf{a}(u, v - u) \geq \langle \varphi, v - u \rangle, \quad \forall v \in K. \quad (15)$$

Además, si \mathbf{a} es simétrica u viene dada por:

$$u \in K, \quad \frac{1}{2}\mathbf{a}(u, u) - \langle \varphi, u \rangle = \min_{v \in K} \left\{ \frac{1}{2}\mathbf{a}(v, v) - \langle \varphi, v \rangle \right\} \quad (16)$$

Guido Stampacchia, nacido en Nápoles el 26 de marzo de 1922 y fallecido el 27 de abril de 1978 en París.



En la demostración del Teorema de G. Stampacchia, vamos a utilizar el teorema del punto fijo de Banach o de las contracciones.

TEOREMA 4 (Teorema del punto fijo de Banach). Sean X un espacio métrico completo con distancia d y $F : X \rightarrow X$ una aplicación (contracción) que verifica: existe $k \in]0, 1[$ tal que

$$d(\mathbf{F}(x), \mathbf{F}(y)) \leq kd(x, y), \quad \forall x, y \in X. \quad (17)$$

Entonces existe un único $x \in X$ tal que $\mathbf{F}(x) = x$, es decir, un único punto fijo de \mathbf{F}

NOTA 3. Debe notarse que el teorema del punto fijo de Banach (Stefan Banach (1892 - 1945)) nos da un resultado de unicidad.



Demostración. La demostración se basa en un argumento de iteración. Se fija un $x_0 \in X$ cualquiera y se define por recurrencia la sucesión:

$$x_n = \mathbf{F}(x_{n-1}), \quad n \geq 1. \quad (18)$$

De la hipótesis 17 se tiene que

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(\mathbf{F}(x_n), \mathbf{F}(x_{n-1})) \leq kd(x_n, x_{n-1}) \dots \leq k^n d(x_1, x_0) \quad (19)$$

para cada $n \geq 0$. De la desigualdad triangular y 19 se obtiene,

$$d(x_{n+1+p}, x_n) \leq \sum_{i=0}^p d(x_{n+i+1}, x_{n+i}) \leq \sum_{i=0}^p k^{n+i} d(x_1, x_0) \leq k^n d(x_1, x_0) \sum_{i=0}^p k^i \quad (20)$$

Mayorando, se tiene:

$$d(x_{n+1+p}, x_n) \leq k^n d(x_1, x_0) \sum_{i=0}^{\infty} k^i \leq k^n d(x_1, x_0) \frac{1}{1-k},$$

pues $0 < k < 1$. En consecuencia la sucesión $\{x_n\}$ es de Cauchy y de la completitud de X se tiene que $\{x_n\}$ es convergente a algún elemento $x \in X$. Como F es continua, $F(x_n)$ converge a $F(x)$. Pasando al límite en 18, se obtiene la existencia de un punto fijo.

Para la unicidad, supongamos que existen dos $x, y \in X$ puntos fijos de F . Usando 17 tenemos que:

$$d(x, y) = d(F(x), F(y)) \leq kd(x, y),$$

y por lo tanto $x = y$ pues $0 < k < 1$. □

2.2.1 Demostración del Teorema de G. Stampacchia

A más del teorema del punto fijo de Banach se utilizan los teoremas de representación de Riesz-Fréchet y de proyección sobre un convexo, cerrado y no vacío.

TEOREMA 5 (Representación de Riesz-Fréchet). Para cualquier $\varphi \in H'$ existe un único $f \in H$ tal que

$$\langle \varphi, v \rangle = (f|v) \quad \forall v \in H \tag{21}$$

Además,

$$|f| = \|\varphi\|_{H'}$$

3 Maurice René Fréchet

Maurice René Fréchet, (Maligny, 2 de septiembre de 1878 - París, 4 de junio de 1973), fue un matemático francés



4 Frigyes Riesz

Riesz Frigyes; 22 de enero de 1880 - 28 de febrero de 1956, matemático húngaro.



TEOREMA 6 (de la proyección sobre un convexo, cerrado). Sea $K \subseteq H$ un subconjunto no vacío, cerrado y convexo. Entonces para cada $f \in H$ existe un único elemento $u \in K$, notada $u = P_K f$ tal que

$$|f - u| = \min_{v \in K} |f - v| \quad (22)$$

Además, $u = P_K f$ cumple las siguientes propiedades:

$$u \in K \quad y \quad (f - u|v - u) \leq 0 \quad \forall v \in K \quad (23)$$

$$|P_K f - P_K g| \leq |f - g| \quad \forall f, g \in H. \quad (24)$$

5 Demostración del Teorema de G. Stampacchia

Demostración. Aplicando el teorema de representación de Riesz-Fréchet obtenemos que existe $f \in H$ tal que

$$\langle \varphi, v \rangle = (f|v) \quad \forall v \in H. \quad (25)$$

Por otro lado, si fijamos $u \in H$, la aplicación $v \rightarrow \mathbf{a}(u, v)$ es un funcional lineal y continuo sobre H . Usando una vez más el teorema de representación de Riesz-Fréchet tenemos que existe un único elemento de H , que escribiremos Au , tal que $\mathbf{a}(u, v) = (Au|v)$ para todo $v \in H$. Se ve que es posible definir un operador \mathbf{A} de H en H tal que $\mathbf{A}u = Au$, lineal y que verifica:

$$|\mathbf{A}u| \leq C|u| \quad \forall u \in H \quad (26)$$

$$(\mathbf{A}u|u) \geq \alpha|u|^2 \quad \forall u \in H. \quad (27)$$

En consecuencia el problema 15 se transforma en encontrar $u \in K$ tal que

$$(\mathbf{A}u|v - u) \geq (f|v - u) \quad \forall v \in K. \quad (28)$$

Es decir, en probar que existe un único $u \in K$ tal que

$$(\mathbf{A}u - f|v - u) \geq 0 \quad \forall v \in K, \quad (29)$$

o equivalentemente, si $\lambda > 0$

$$(\lambda f - \lambda \mathbf{A}u + u - u|v - u) \leq 0 \quad \forall v \in K, \quad (30)$$

es decir,

$$u = P_K(\lambda f - \lambda \mathbf{A}u + u).$$

Para cada $v \in K$ definamos $S(v) = P_K(\lambda f - \lambda \mathbf{A}v + v)$. Probemos que si se elige oportunamente $\lambda > 0$, entonces S es una contracción estricta; es decir, existe $k < 1$ tal que

$$|S(v) - S(w)| \leq k|v - w| \quad \forall v, w \in K.$$

Efectivamente, de las propiedades del teorema de proyección se tiene:

$$|S(v) - S(w)| \leq |(v - w) - \lambda(\mathbf{A}v - \mathbf{A}w)|$$

y en consecuencia

$$\begin{aligned} |S(v) - S(w)|^2 &\leq |v - w|^2 - 2\lambda(\mathbf{A}v - \mathbf{A}w|v - w) + \lambda^2|\mathbf{A}v - \mathbf{A}w|^2 \\ &\leq |v - w|^2(1 - 2\lambda\alpha + \lambda^2C^2) \end{aligned}$$

Tomando $\lambda > 0$ de tal forma que $k^2 = 1 - 2\lambda\alpha + \lambda^2C^2 < 1$, es decir, $0 < \lambda < \frac{2\alpha}{C^2}$, S es una contracción y del teorema del punto fijo S admite un único punto fijo $u \in K$. Y en consecuencia el teorema queda demostrado.

Para la caracterización en el caso simétrico basta tomar \mathbf{a} como producto escalar de H y aplicar el teorema de representación con ese nuevo producto escalar a más del teorema de proyección para obtener lo deseado. \square

6 Demostración del Teorema de Lax-Milgram

Demostración. Del teorema de G. Stampacchia se tiene que para cada $\varphi \in H'$ existe un único $u \in H$ tal que

$$\mathbf{a}(u, v - u) \geq \langle \varphi, v - u \rangle, \quad \forall v \in H. \quad (31)$$

En particular, si $v = w + u$ para cualquier $w \in H$ se obtiene de 31

$$\mathbf{a}(u, w + u - u) \geq \langle \varphi, w + u - u \rangle, \quad \forall w \in H,$$

simplificando,

$$\mathbf{a}(u, w) \geq \langle \varphi, w \rangle, \quad \forall w \in H.$$

Ahora si tomamos $v = -w + u$ para cualquier $w \in H$ se obtiene de 31

$$\mathbf{a}(u, -w + u - u) \geq \langle \varphi, -w + u - u \rangle, \quad \forall w \in H,$$

simplificando,

$$\mathbf{a}(u, w) \leq \langle \varphi, w \rangle, \quad \forall w \in H,$$

En consecuencia, de las dos desigualdades anteriores tenemos que $\mathbf{a}(u, w) - \langle \varphi, w \rangle = 0$ para todo $w \in H$. \square

7 Teorema de Stampacchia Guido

TEOREMA 7 (Stampacchia Guido). Sean H un espacio de Hilbert y $\mathbf{a} : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ una forma lineal en la segunda variable que verifica

1. $\mathbf{a}(0, w) = 0$ para todo $w \in H$,
2. existe β constante tal que

$$|\mathbf{a}(u_1, w) - \mathbf{a}(u_2, w)| \leq \beta |u_1 - u_2| |w| \quad \forall u_1, u_2, w \in H$$

3. existe $\alpha > 0$ tal que

$$\mathbf{a}(u_1, u_1 - u_2) - \mathbf{a}(u_2, u_1 - u_2) \geq \alpha |u_1 - u_2|^2 \quad \forall u_1, u_2, w \in H$$

Entonces, dado $\varphi \in H'$ existe un único $u \in H$ tal que:

$$\mathbf{a}(u, v) = \langle \varphi, v \rangle, \quad \forall v \in H. \quad (32)$$

7.1 Demostración del Teorema de Stampacchia Guido

Demostración. Aplicando el teorema de representación de Riesz-Fréchet obtenemos que existe $f \in H$ tal que

$$\langle \varphi, v \rangle = (f|v) \quad \forall v \in H. \quad (33)$$

Por otro lado, si fijamos $u \in H$, la aplicación $v \rightarrow \mathbf{a}(u, v)$ es un funcional lineal y continuo sobre H . Usando una vez más el teorema de representación de Riesz-Fréchet tenemos que existe un único elemento de H , que escribiremos Au , tal que $\mathbf{a}(u, v) = (Au|v)$ para todo $v \in H$. Se ve que es posible definir un operador \mathbf{A} de H en H tal que $\mathbf{A}(u) = Au$ verificante:

$$|\mathbf{A}(u_1) - \mathbf{A}(u_2)| \leq \beta |u_1 - u_2| \quad \forall u_1, u_2 \in H \quad (34)$$

$$(\mathbf{A}(u_1) - \mathbf{A}(u_2)|u_1 - u_2) \geq \alpha |u_1 - u_2|^2 \quad \forall u_1, u_2 \in H. \quad (35)$$

En consecuencia el problema 32 se transforma en encontrar $u \in H$ tal que

$$(\mathbf{A}(u)|v) = (f|v) \quad \forall v \in H. \quad (36)$$

Es decir, en probar que existe un único $u \in H$ tal que

$$(\mathbf{A}(u) - f|v) = 0 \quad \forall v \in H, \quad (37)$$

o equivalentemente, si $\lambda > 0$

$$(\lambda f - \lambda \mathbf{A}(u) + u - u|v) = 0 \quad \forall v \in H, \quad (38)$$

es decir,

$$u = \lambda f - \lambda \mathbf{A}(u) + u$$

Para cada $v \in H$ definamos $S(v) = \lambda f - \lambda \mathbf{A}(v) + v$. Si se elige $\frac{2\alpha}{\beta^2} > \lambda > 0$, entonces S es una contracción estricta; es decir, existe $k < 1$ tal que

$$|S(v) - S(w)| \leq k|v - w| \quad \forall v, w \in H,$$

y en consecuencia S admite un único punto fijo $u \in H$ y por lo tanto $f = \mathbf{A}(u)$, es decir

$$\mathbf{a}(u, v) = (\mathbf{A}(u)|v) = (f|v) \quad \forall v \in H. \quad (39)$$

□

8 Repaso sobre Espacios de Sobolev

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto, $p \in \mathbb{R}$, $1 \leq p \leq \infty$.

DEFINICIÓN 2. El Espacio de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ está definido por:

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) \mid \begin{array}{l} \exists g_1, g_2, \dots, g_N \in L^p \text{ tal que} \\ \int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = - \int_{\Omega} g_i \varphi, \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega), \quad \forall i = 1, 2, \dots, N \end{array} \right\}.$$

Se pone

$$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$$

Para $u \in W^{1,p}(\Omega)$ definimos $\frac{\partial u}{\partial x_i} = g_i$. El espacio $W^{1,p}(\Omega)$ está dotado de la norma

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_{L^p} + \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p}$$

o algunas veces con la norma equivalente

$$\left(\|u\|_{L^p}^p + \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p}^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

El espacio $H^1(\Omega)$ está dotado del producto escalar

$$(u|v)_{H^1} = (u|v)_{L^2} + \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \mid \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)_{L^2}$$

La norma asociada

$$|u|_{H^1} = \left(|u|_{L^2}^2 + \sum_{i=1}^N \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|_{L^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

que es equivalente a la norma de $W^{1,2}(\Omega)$.

PROPOSICIÓN 2. *El espacio $W^{1,p}(\Omega)$ es un espacio de Banach para $1 \leq p \leq \infty$; $W^{1,p}(\Omega)$ es reflexivo para $1 < p < \infty$ y separable para $1 \leq p < \infty$. El espacio $H^1(\Omega)$ es un espacio de Hilbert separable.*

NOTA 4. *Recordemos que todo espacio de Hilbert es reflexivo.*

Para $1 \leq p < N$ definimos el número real p^* por medio de $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$.

TEOREMA 8 (de inmersión de Sobolev). Las siguientes inmersiones

- Si $1 \leq p < N$ entonces $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ para $q \in [p, p^*]$ (Sobolev, Gagliardo, Nirenberg)
- Si $p = N$ entonces $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ para $q \in [p, \infty[$
- Si $p > N$ entonces $W^{1,p}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$ (Morrey)

son continuas.

TEOREMA 9 (Rellich-Kondrachov). En el caso Ω acotado de clase C^1 se tiene que las siguientes inmersiones

- Si $1 \leq p < N$ entonces $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ para $q \in [p, p^*]$
- Si $p = N$ entonces $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ para $q \in [p, \infty[$
- Si $p > N$ entonces $W^{1,p}(\Omega) \subset C(\bar{\Omega})$

son compactas.

DEFINICIÓN 3. Sea $1 \leq p < \infty$; $W_0^{1,p}(\Omega)$ designa la clausura (cierre) de $C_c^1(\Omega)$ en $W^{1,p}(\Omega)$. Se escribe

$$H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega).$$

El espacio $W_0^{1,p}(\Omega)$ dotado de la norma inducida por $W^{1,p}(\Omega)$ es un espacio de Banach separable y es reflexivo si $1 < p < \infty$.

$H_0^1(\Omega)$ es un espacio de Hilbert con la norma de $H^1(\Omega)$.

TEOREMA 10 (Desigualdad de Poincaré). Sea Ω un abierto acotado. Entonces existe una constante $C(\Omega, p)$ tal que

$$\|u\|_{L^p} \leq C \|\nabla u\|_{L^p} \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega) \quad 1 \leq p < \infty$$

En consecuencia, la expresión $\|\nabla u\|_{L^p}$ es una norma en $W_0^{1,p}(\Omega)$ equivalente a la norma de $W^{1,p}(\Omega)$.

En $H_0^1(\Omega)$ la expresión $\int_\Omega \nabla u \nabla v$ es un producto escalar que induce la norma $\|\nabla u\|_{L^2}$ equivalente a la norma de $H^1(\Omega)$

9 Henri Poincaré

Henri Poincaré, matemático francés nacido en Nancy el 29 de abril de 1854 y fallecido en París el 17 de julio de 1912.



10 David Hilbert

David Hilbert, matemático alemán nacido en Königsberg el 23 de enero de 1863 y fallecido en Gotinga el 14 de febrero de 1943.



11 Sergei Sobolev

Sergei Sobolev, matemático ruso nacido el 6 de octubre de 1908 y fallecido el 3 de enero de 1989.



12 Georg Friedrich Bernhard Riemann

Georg Friedrich Bernhard Riemann, matemático alemán nacido el 17 de septiembre de 1826 y fallecido el 20 de julio de 1866.



13 Louis Nirenberg

Louis Nirenberg, matemático norte americano, nacido en Canadá el 28 de febrero de 1825.



14 Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet

Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet, matemático alemán, nacido el 13 de febrero de 1805 y fallecido el 5 de mayo de 1859.



15 Emilio Gagliardo

Emilio Gagliardo, matemático italiano, nacido el 5 de noviembre de 1930 y fallecido el 15 de agosto de 2008.



16 Problema de Dirichlet homogéneo

Sea Ω abierto acotado y suficientemente regular. El problema de Dirichlet consiste en encontrar $u : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que verifique:

$$-\Delta u + u = f \quad \text{en } \Omega \quad (40)$$

$$u = 0 \quad \text{en } \partial\Omega \quad (41)$$

donde f está dado.

DEFINICIÓN 4. Una solución clásica de (40), (41) es una función $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ que verifica (40), (41). Una solución débil de (40), (41) es una función $u \in H_0^1(\Omega)$ que cumple con

$$\int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla v + uv) dx = \int_{\Omega} f v dx \quad \text{para todo } v \in H_0^1(\Omega) \quad (42)$$

NOTA 5. *Toda solución clásica es solución débil.*

17 Teorema de Dirichlet, Riemann, Poincaré, Hilbert

TEOREMA 11 (Dirichlet, Riemann, Poincaré, Hilbert). Para cada $f \in L^2(\Omega)$ existe $u \in H_0^1(\Omega)$ única solución débil de (40), (41). Además u se obtiene mediante la resolución del problema

$$\min_{v \in H_0^1(\Omega)} \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|\nabla v|^2 + v^2) - \int_{\Omega} f v \right\} \quad (43)$$

17.1 Prueba del teorema de Dirichlet, Riemann, Poincaré, Hilbert

Demostración. Tomemos como espacio de Hilbert H al espacio $H_0^1(\Omega)$ con la norma de $H^1(\Omega)$ y definamos $\mathbf{a} : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ de la manera siguiente:

$$\mathbf{a}(u, v) = \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla v + uv) dx \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega) \quad (44)$$

Nótese que \mathbf{a} es una forma bilineal continua, coerciva y simétrica.

Sea ahora $\varphi : H \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\varphi(v) = \int_{\Omega} f v dx$$

φ es una aplicación lineal y continua en $H_0^1(\Omega)$ y por tanto un elemento del dual de $H_0^1(\Omega)$ (al dual de $H_0^1(\Omega)$ notaremos $H^{-1}(\Omega)$). En consecuencia, encontrar una solución débil de (40), (41) se transforma en encontrar $u \in H$ tal que

$$\mathbf{a}(u, v) = \langle \varphi, v \rangle \quad \forall v \in H$$

Obsérvese que el problema anterior es justamente el resuelto por el teorema de Lax-Milgram. Por lo tanto, aplicamos el teorema de Lax-Milgram y nuestro teorema queda demostrado. \square

18 Problema de Dirichlet no homogéneo

Sea Ω abierto acotado y suficientemente regular. El problema de Dirichlet no homogéneo consiste en encontrar $u : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que verifique:

$$-\Delta u + u = f \quad \text{en } \Omega \tag{45}$$

$$u = g \quad \text{en } \partial\Omega \tag{46}$$

donde f, g están dados. Supongamos que existe $\tilde{g} \in H^1(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ tal que $\tilde{g} = g$ en $\partial\Omega$ y definimos el conjunto

$$K = \{v \in H^1(\Omega) | v - \tilde{g} \in H_0^1(\Omega)\}$$

NOTA 6. K es un subconjunto de H , convexo, cerrado y no vacío.

DEFINICIÓN 5. Una solución clásica de (45), (46) es una función $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ que verifica (45), (46). Una solución débil de (45), (46) es una función $u \in K$ que cumple con

$$\int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla v + uv) dx = \int_{\Omega} f v dx \quad \text{para todo } v \in H_0^1(\Omega) \tag{47}$$

NOTA 7. Toda solución clásica es solución débil.

TEOREMA 12. Para cada $f \in L^2(\Omega)$ existe $u \in K$ única solución débil de (45), (46). Además u se obtiene mediante la resolución del problema

$$\min_{v \in K} \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|\nabla v|^2 + v^2) - \int_{\Omega} f v \right\} \tag{48}$$

Demostración. Observemos que $u \in K$ es solución débil de (45), (46) si y solamente si

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot (\nabla v - \nabla u) dx + \int_{\Omega} u(v - u) dx \geq \int_{\Omega} f(v - u) dx \quad \text{para todo } v \in K. \quad (49)$$

Se aplica entonces el teorema de G. Stampacchia en el espacio de Hilbert $H = H^1(\Omega)$ y el resultado se obtiene. □

19 Un problema semilineal de tipo Dirichlet homogéneo

Sea Ω abierto acotado y suficientemente regular.

Consideremos el siguiente problema: Encontrar $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que verifique:

$$-\nabla \cdot (M(x)\nabla u) + g(u) = f \quad \text{en } \Omega \quad (50)$$

$$u = 0 \quad \text{en } \partial\Omega \quad (51)$$

donde f, g funciones y M matriz $N \times N$ dados. Vamos a considerar (en lo que sigue) que la matriz M es simétrica de término general $m_{i,j}(x)$ tal que $m_{i,j} \in C^1(\bar{\Omega})$ y que es elíptica, es decir:

existe $\alpha > 0$ tal que

$$M(x)\xi \cdot \xi \geq \alpha|\xi|^2 \quad (52)$$

Llamaremos $\gamma = \max_{1 \leq i,j \leq N} \sup_{x \in \Omega} |m_{i,j}(x)|$

TEOREMA 13. Sea $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función creciente, lipchitziana, esto es, que existe $C > 0$ tal que $|g(s) - g(t)| \leq C|s - t|$, para cada $s, t \in \mathbb{R}$. Supongamos, también que: $|g(s)| \leq \delta|s|$ para algún $\delta > 0$. Entonces para cada $f \in L^2(\Omega)$ existe una única solución débil $u \in H_0^1(\Omega)$ del problema (50), (51).

Demostración. Definamos la siguiente forma en $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$

$$\mathfrak{a}(u, v) = \int_{\Omega} M(x)\nabla u \cdot \nabla v + \int_{\Omega} g(u)v \quad (53)$$

Notemos que \mathfrak{a} está bien definida, ya que

$$|\mathfrak{a}(u, v)| \leq \gamma \int_{\Omega} |\nabla u| |\nabla v| + \delta \int_{\Omega} |uv|$$

por las hipótesis sobre M y aquellas de crecimiento de g .

Claramente \mathfrak{a} es lineal en la segunda componente. Para demostrar el teorema vamos a utilizar el teorema de Stampacchia Guido y por lo tanto comprobemos que \mathfrak{a} verifica las hipótesis del mismo.

Antes que nada:

$$|\mathfrak{a}(u_1, v) - \mathfrak{a}(u_2, v)| \leq \gamma \int_{\Omega} |\nabla(u_1 - \nabla(u_2))| |\nabla v| + C \int_{\Omega} |u_1 - u_2| |v|$$

de las hipótesis sobre M y la Lipschitz continuidad de g .

En consecuencia

$$|\mathfrak{a}(u_1, v) - \mathfrak{a}(u_2, v)| \leq \gamma \|\nabla(u_1 - \nabla(u_2))\|_{L^2} \|\nabla v\|_{L^2} + C \|u_1 - u_2\|_{L^2} \|v\|_{L^2}$$

por la desigualdad de Cauchy-Schwarz. Probemos ahora que \mathfrak{a} verifica la hipótesis 2 del teorema de Stampacchia Guido:

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}(u_1, u_1 - u_2) - \mathfrak{a}(u_2, u_1 - u_2) &= \int_{\Omega} M(x) \nabla u_1 \cdot \nabla(u_1 - u_2) + \int_{\Omega} g(u_1)(u_1 - u_2) - \\ &\quad - \int_{\Omega} M(x) \nabla u_2 \cdot \nabla(u_1 - u_2) - \int_{\Omega} g(u_2)(u_1 - u_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}(u_1, u_1 - u_2) - \mathfrak{a}(u_2, u_1 - u_2) &= \int_{\Omega} M(x) (\nabla u_1 - \nabla u_2) \cdot \nabla(u_1 - u_2) \\ &\quad + \int_{\Omega} (g(u_1) - g(u_2))(u_1 - u_2) \end{aligned}$$

En consecuencia, de la elipticidad de M y la monotonía de g obtenemos que

$$\mathfrak{a}(u_1, u_1 - u_2) - \mathfrak{a}(u_2, u_1 - u_2) \geq \alpha \|\nabla(u_1 - u_2)\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Y la tesis viene del teorema de Stampacchia Guido. \square

20 El modelo de Grad-Shafranov

En lo que sigue describamos primero el modelo de Grad-Shafranov en física del plasma.

Vamos a considerar una región toroidal, axisimétrica (simétrica con respecto al eje) con eje $0z$, del espacio parcialmente ocupada por un plasma. Llamaremos Ω a una sección transversal del toro, $\Omega_p \subset \Omega$ será la parte ocupada por el plasma mientras que Ω_v la parte vacía. Notaremos por $\Gamma = \partial\Omega$ la frontera de Ω y por Γ_p la de Ω_p . Claramente, $\Omega_v = \Omega - \Omega_p$. Observemos que la frontera de Ω , Γ , está determinada desde el inicio, la de Ω_p , Γ_p , va cambiando (mientras el plasma ocupa la región vacía), es otra incógnita, es lo que denominamos una frontera libre.

En la región donde hay plasma se induce una corriente y las ecuaciones de Maxwell se expresan:

$$\mathit{div} \mathbf{B} = 0 \quad \text{en} \quad \Omega \quad (54)$$

$$\mathit{rot} \mathbf{B} = 0 \quad \text{en} \quad \Omega_v \quad (55)$$

$$\mathit{rot} \mathbf{B} = \mathbf{J} \quad \text{en} \quad \Omega_p \quad (56)$$

$$\nabla p = \mathbf{J} \times \mathbf{B} \quad (57)$$

donde \mathbf{B} es el campo magnético, \mathbf{J} el campo eléctrico y p la presión.

Si denotamos por η la normal exterior a Ω_v , las condiciones de contorno del problema se escriben:

$$\mathbf{B} \cdot \eta = 0 \quad \text{en} \quad \Gamma \cup \Gamma_p \quad (58)$$

$$\mathbf{J}_\theta = 0 \quad \text{en} \quad \Omega_v \cup \Gamma_p \quad (59)$$

$$\mathbf{J}_\theta > 0 \quad \text{en} \quad \Omega_p \quad (60)$$

Finalmente se prescribe la corriente eléctrica longitudinal por medio de la expresión:

$$I = \int_{\Omega_p} \mathbf{J}_\theta dx > 0 \quad (61)$$

20.1 Grad-Shafranov

A partir de las ecuaciones dadas obtendremos, haciendo algunas aproximaciones, el modelo de Grad-Shafranov. Vamos a suponer que para tiempos pequeños la región Ω_v no cambia demasiado; supondremos también que existe cierta simetría, digamos la simetría axial y por tanto no hay dependencia del ángulo θ por parte de \mathbf{B} , \mathbf{J} , y la presión p . En coordenadas cilíndricas los campos magnético y eléctrico se escriben, respectivamente, como:

$$\mathbf{B} = B_r \mathbf{e}_r + B_\theta \mathbf{e}_\theta + B_z \mathbf{e}_z \quad (62)$$

y

$$\mathbf{J} = J_r \mathbf{e}_r + J_\theta \mathbf{e}_\theta + J_z \mathbf{e}_z \quad (63)$$

Pasando las ecuaciones a coordenadas cilíndricas obtendremos:

$$\text{div} \mathbf{B} \equiv \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r B_r) + \frac{\partial B_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial z} (r B_z) \right] = 0 \quad (64)$$

De la independencia de θ y la ecuación anterior tenemos que $\mathbf{B}(r, z)$ verifica:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_r) + \frac{\partial}{\partial z} (B_z) = 0 \quad (65)$$

De esto concluimos que existe un campo escalar potencial u tal que:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = r B_z, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = -r B_r \quad (66)$$

Puesto que,

$$\text{rot} \mathbf{B} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial B_z}{\partial \theta} - \frac{\partial B_\theta}{\partial z} \right) \mathbf{e}_r + \left(\frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial r} \right) \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r B_\theta) - \frac{\partial B_r}{\partial \theta} \right) \mathbf{e}_z \quad (67)$$

Y si llamamos $f(r, z) = r B_\theta$ y $\mathcal{L}[u] \equiv - \left[\frac{1}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) \right]$, entonces tendremos:

$$\mathcal{L}[u] = 0 \quad \text{en} \quad \Omega_v \quad (68)$$

y

$$-\frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{e}_r + \mathcal{L}[u] \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} \mathbf{e}_z = \mathbf{J} \quad \text{en} \quad \Omega_p \quad (69)$$

De la ecuación $\nabla p = \mathbf{J} \times \mathbf{B} = \mathbf{rot} \mathbf{B} \times \mathbf{B}$ en Ω_p , obtendremos las tres ecuaciones siguientes:

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{1}{r} \mathcal{L}[u] \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{2r^2} \frac{\partial f^2}{\partial r} \quad \text{en} \quad \Omega_p \quad (70)$$

$$0 = \frac{\partial p}{\partial \theta} = \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial r} - \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial r} \right) \quad \text{en} \quad \Omega_p \quad (71)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{1}{r} \mathcal{L}[u] \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{1}{2r^2} \frac{\partial f^2}{\partial z} \quad \text{en} \quad \Omega_p \quad (72)$$

De la ecuación (71) inferimos que ∇f es paralelo a ∇u , en Ω_p y por lo tanto f depende únicamente de u :

$$f^2 = g_0(u), \quad \nabla f^2 = g'_0 \cdot \nabla u, \quad \text{donde} \quad g'_0 = \frac{dg_0}{du} \quad (73)$$

De las ecuaciones (70) y (72) podemos deducir que:

$$\nabla p = \left(\frac{1}{r} \mathcal{L}[u] - \frac{1}{2r^2} g'_0 \right) \nabla u. \quad (74)$$

Nuevamente se tiene paralelismo, ahora ∇p es paralelo a ∇u , y por tanto p depende sólo de u , escribamos:

$$p = g_1(u), \quad \nabla p = g'_1 \cdot \nabla u \quad (75)$$

De (74) y (75) obtenemos, finalmente, que las ecuaciones (70), (71) y (72) se transformen en la sola ecuación:

$$\mathcal{L}[u] = r g'_1(u) + \frac{1}{2r} g'_0(u) \quad \text{en} \quad \Omega_p \quad (76)$$

Por las expresiones (66), (68), (73) y (75), f y p son funciones de u y u es la solución de (68) y (76). Naturalmente, g_0 y g_1 son funciones desconocidas de u que no pueden ser determinadas usando solo las ecuaciones de Maxwell. Ellas son funciones constitutivas del plasma. En los modelos que se consideran se darán formas fáciles para g_0 y g_1 .

Gracias a la expresión (66) las condiciones de borde, $\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\eta} = 0$, se transforman en:

$$0 = \frac{-1}{r} \frac{\partial u}{\partial \tau}, \quad (77)$$

donde $\boldsymbol{\tau}$ es el vector unitario tangente a Γ_p y Γ . De esto tenemos que $u \equiv cte$ en $\Gamma_p \cup \Gamma$ y como u es un potencial, por adición de una constante, se puede poner,

$$u = 0 \quad \text{en} \quad \Gamma_p \quad (78)$$

$$u = \gamma \quad \text{en} \quad \Gamma \quad (79)$$

Finalmente,

$$I = \int_{\Omega_p} \mathbf{J}_\theta dx = \int_{\Omega} \mathcal{L}[u] dx = \int_{\partial\Omega} \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \eta} d\sigma \quad (80)$$

De (68), (76), (79) y (80) el modelo de Grad-Shafranov es:

$$\mathcal{L}[u] = h(r, u) \quad \text{en} \quad \Omega \quad (81)$$

$$u = \gamma \quad \text{en} \quad \Gamma \quad (82)$$

$$I = \int_{\partial\Omega} \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \eta} d\sigma \quad (83)$$

donde h es:

$$h(r, u) = r g_1'(u) + \frac{1}{2r} g_0'(u) \quad \text{en} \quad \Omega_p \quad (84)$$

y

$$h(r, u) = 0 \quad \text{en} \quad \Omega_v. \quad (85)$$

NOTA 8. *Problemas de frontera libre como el anterior han sido estudiados exitosamente utilizando la teoría de puntos críticos.*

21 Sistemas Lagrangianos con potenciales suaves

Consideremos el sistema de segundo orden:

$$\ddot{q} + V'(t, q) = 0 \quad (86)$$

donde $V \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ y V' es el gradiente de V con respecto a x .

El sistema (86) es un típico problema variacional porque es la ecuación de Euler del funcional:

$$\mathcal{A}(u) = \int L(t, u(t), \dot{u}(t)) dt \quad (87)$$

donde el Lagrangiano L tiene la forma

$$L(t, x, \dot{x}) = \frac{1}{2} |\dot{x}|^2 + V(t, x) \quad (88)$$

Observemos que el sistema (86) es un caso particular del sistema Hamiltoniano de primer orden:

$$\begin{cases} \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q} \\ \dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p} \end{cases} \quad (89)$$

En efecto, (86) se transforma en (89) cuando se toma

$$H(t, p, q) = \frac{1}{2}|p|^2 + V(t, q)$$

Supongamos que

$$V(t+T, q) = V(t, q) \quad \text{para todo } (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N. \quad (90)$$

Entonces es natural buscar soluciones T periódicas para (86).

NOTA 9. Las soluciones de (86) se pueden encontrar como puntos estacionarios del funcional de acción (87) sobre el espacio de Sobolev $H^1(S_T, \mathbb{R}^n)$ donde $S_T = [0, T]/\{0, T\}$ es el círculo unitario parametrizado por $t \in [0, T]$.

Herramientas variacionales abstractas como los teoremas del paso de montaña (Ambrosetti-Rabinowitz), Linking y el principio variacional dual han sido usados para encontrar los puntos críticos de \mathcal{A} y por lo tanto soluciones periódicas de (86) para una amplia clase de potenciales suaves y más generalmente, para sistemas de primer orden como (89).

22 Puntos Críticos, máximos y mínimos

Sea E un espacio de Banach. Un funcional sobre E es una función continua a valores reales $J : E \rightarrow \mathbb{R}$

Diremos que $J \in \mathcal{C}^1(E, \mathbb{R})$ si J es (Fréchet) diferenciable con diferencial continua $dJ(u)$ en todo $u \in E$.

DEFINICIÓN 6. Un punto crítico o estacionario de $J : E \rightarrow \mathbb{R}$ es un $z \in E$ tal que J es diferenciable en z y $dJ(z) = 0$. Un nivel crítico de J es un número $c \in \mathbb{R}$ tal que existe un punto crítico $z \in E$ con $J(z) = c$

De acuerdo con la definición, un punto crítico z verifica:

$$dJ(z)[v] = 0, \quad \text{para todo } v \in E \quad (91)$$

Veremos en las aplicaciones que puntos críticos son soluciones débiles de ecuaciones diferenciales. Demos un ejemplo elemental.

Sea $E = H_0^1(0, 1) = \{u \in H^1(0, 1) | u(0) = u(1) = 0\}$ y definamos el funcional $J : E \rightarrow \mathbb{R}$ por:

$$J(u) = \int_0^1 \left\{ \frac{1}{2}(\dot{u}^2 + u^2) - \frac{1}{4}u^4 \right\} dt, \quad \dot{u} = \frac{du}{dt}. \quad (92)$$

Se puede probar que $J \in \mathcal{C}^\infty(E, \mathbb{R})$ y

$$dJ(u)[v] = \int_0^1 \{(\dot{u}\dot{v} + uv) - u^3v\} dt. \quad (93)$$

Entonces un punto crítico de J en E es un elemento $z \in E$ tal que:

$$\int_0^1 \{(\dot{z}\dot{v} + zv) - z^3v\} dt = 0, \quad \text{para todo } v \in H_0^1(0, 1) \quad (94)$$

de aquí tenemos que z es una solución débil del problema al borde $\ddot{u} - u + u^3 = 0$, y $u(0) = u(1) = 0$.

23 Existencia de mínimos

Decimos que z es un mínimo local, respectivamente máximo de un funcional $J \in \mathcal{C}(E, \mathbb{R})$ si existe una vecindad \mathcal{V} de z tal que:

$$J(z) \leq J(u), \quad \text{respectivamente} \quad J(z) \geq J(u), \quad \text{para todo } u \in \mathcal{V} \setminus z \quad (95)$$

Si las desigualdades anteriores son estrictas nosotros diremos que z es un mínimo (máximo) local estricto.

Si (95) se verifica para cada $u \in E$, z es un mínimo (máximo) global. Se prueba fácilmente que si $z \in E$ es un mínimo (máximo) local y J es diferenciable en z , entonces z es un punto estacionario de J , es decir, $dJ(z) = 0$ o $J'(z) = 0$ (gradiente de J en z igual a cero). Demos un resultado clásico para funcionales coercivos y débil inferiormente semicontinuos (w.l.s.c.). Decimos que $J \in \mathcal{C}(E, \mathbb{R})$ es coercivo si

$$\lim_{\|u\| \rightarrow +\infty} J(u) = +\infty. \quad (96)$$

J es w.l.s.c. si para cada sucesión $u_n \in E$ tal que $u_n \rightharpoonup u$ se tiene que

$$J(u) \leq \liminf J(u_n) \quad (97)$$

LEMA 1. Sea E un espacio de Banach reflexivo y sea $J : E \rightarrow \mathbb{R}$ coercivo y w.l.s.c. Entonces J es inferiormente acotado en E , es decir, existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $J(u) \geq a$ para todo $u \in E$.

Demostración. Se demuestra por absurdo. Sea $\{u_n\}$ una sucesión en E tal que $J(u_n) \rightarrow -\infty$. Puesto que J es coerciva se tiene que existe $R > 0$ tal que $\|u_n\| \leq R$. Por lo tanto existe $u \in E$ tal que $u_n \rightharpoonup u$. Del hecho que J es w.l.s.c. nosotros obtenemos que

$$J(u) \leq \liminf J(u_n) = -\infty, \quad (98)$$

un absurdo. De esto queda probado el lema. \square

TEOREMA 14 (teorema de mínimo). Sea E un espacio de Banach reflexivo y sea $J : E \rightarrow \mathbb{R}$ coercivo y w.l.s.c. Entonces J tiene un mínimo global, es decir existe $z \in E$ tal que $J(z) = \min\{J(u) : u \in E\}$. Si J es diferenciable en z , entonces $dJ(z) = 0$.

Demostración. Del lema precedente se sigue que $m \equiv \inf\{J(u) : u \in E\}$ es finito. Sea $\{u_n\}$ una sucesión minimizante, esto es, $J(u_n) \rightarrow m$. Nuevamente de la coercividad de J tenemos que $\|u_n\| \leq R'$, y $u_n \rightharpoonup z$ para algún $z \in E$. Puesto que J es w.l.s.c. se tiene que

$$J(z) \leq \liminf J(u_n) = m, \quad (99)$$

Naturalmente, $J(z)$ no puede ser estrictamente menor que m y así J alcanza su ínfimo en z y $J(z) = m$. \square

24 Un par de aplicaciones

Antes de nada, consideremos para la primera aplicación que E es un espacio de Hilbert y

$$J(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \Phi(u). \quad (100)$$

TEOREMA 15. Sea J de la forma (100) y supongamos que $\Phi \in \mathcal{C}^1(E, \mathbb{R})$ es débilmente continua (es decir, $u_n \rightharpoonup u \Rightarrow \Phi(u_n) \rightarrow \Phi(u)$) y satisface

$$|\Phi(u)| \leq a_1 + a_2\|u\|^\alpha \quad (101)$$

con $a_1, a_2 > 0$ y $\alpha < 2$.

Entonces J alcanza su mínimo global en algún $z \in E$ y allí verifica que $J'(z) = 0$, esto es $\Phi'(z) = z$.

Demostración. De la (101) se tiene que

$$J(u) \geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - a_1 - a_2\|u\|^\alpha. \quad (102)$$

y por lo tanto J es coercivo porque $\alpha < 2$. Puesto que la aplicación que lleva $u \rightarrow \|u\|$ es w.l.s.c. y Φ es débil continua, entonces J es w.l.s.c. y el teorema de mínimo nos lleva a la existencia de un mínimo global z de J verificando $J'(z) = 0$, esto es, $z - \Phi'(z) = 0$. \square

El teorema anterior puede ser usado, por ejemplo, para estudiar el problema a valores en la frontera de Dirichlet

$$-\Delta u(x) = f(x, u(x)) \quad x \in \Omega \quad (103)$$

$$u(x) = 0 \quad x \in \partial\Omega \quad (104)$$

con $f : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sublineal en el infinito. Precisamente, asumiremos que f es localmente Hölder continua y que existen $a_1 \in \mathbf{L}^2(\Omega)$, $a_2 > 0$ y $0 < q < 1$ tal que

$$|f(x, t)| \leq a_1(x) + a_2|t|^q, \quad (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}. \quad (105)$$

Sea $E = H_0^1(\Omega)$, con norma $\|u\|^2 = \int_\Omega |\nabla u|^2 dx$. Tomando en cuenta que $E = H_0^1(\Omega)$ está sumergido compactamente en $\mathbf{L}^2(\Omega)$ se puede probar que

$$\Phi(u) := \int_\Omega F(x, u) dx, \quad \text{donde} \quad F(x, u) = \int_0^u f(x, s) ds \quad (106)$$

es $\mathcal{C}^1(E)$ y es débil continua. Nosotros estamos en grado de probar el siguiente

TEOREMA 16. Supongamos f localmente Hölder continua y que verifica (105). Entonces (103), (104) tiene una solución.

Demostración. Se considera el funcional $J \in C^1(E, \mathbb{R})$,

$$J(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \Phi(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \int_{\Omega} F(x, u) dx, \quad (107)$$

cuyos puntos críticos son la solución de (103), (104). Usando (105), nosotros podemos encontrar constantes a_i tal que

$$|\Phi(u)| \leq a_3 \|u\|_{L^2} + a_4 \|u\|_{L^{q+1}}^{q+1} \quad (108)$$

$$|\Phi(u)| \leq a_5 \|u\| + a_6 \|u\|^{q+1}. \quad (109)$$

Puesto que $q < 1$ se tiene que J es coercivo en E . Además Φ es débil continuo y entonces por el teorema anterior se tiene que existe un mínimo z tal que $J'(z) = z - \Phi'(z) = 0$, la solución de (103), (104). \square

Como segunda aplicación consideremos el problema

$$\ddot{u} = \nabla F(t, u(t)) \quad a.e. \quad en \quad [0, T] \quad (110)$$

$$u(0) - u(T) = \dot{u}(0) - \dot{u}(T) = 0 \quad (111)$$

donde $F : [0, T] \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ satisface las siguientes hipótesis:

(A) $F(t, x)$ es medible en t para cada $x \in \mathbb{R}^N$ continuamente diferenciable en x para casi todo $t \in [0, T]$, y existen $a \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ y $b \in L^1(0, T; \mathbb{R}^+)$ tal que

$$|F(t, x)| \leq a(|x|)b(t), \quad (112)$$

para todo $x \in \mathbb{R}^N$ y casi todo $t \in [0, T]$.

Sea $1 < p < \infty$. El espacio de Sobolev $W_T^{1,p}$ es el espacio de las funciones $u \in L^p(0, T, \mathbb{R}^N)$, que tienen una derivada débil $\dot{u} \in L^p(0, T, \mathbb{R}^N)$. Se puede probar que, si $u \in W_T^{1,p}$, entonces

$$u(t) = \int_0^t \dot{u}(s) ds + c \quad (113)$$

y $u(0) = u(T)$. La norma para $W_T^{1,p}$ está definida por

$$\|u(t)\|_{W_T^{1,p}} = \left(\int_0^T |u(t)|^p dt + \int_0^T |\dot{u}(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \quad (114)$$

Fácilmente se puede probar que $W_T^{1,p}$ es un espacio de Banach reflexivo y que $C_T^\infty \subset W_T^{1,p}$, donde C_T^∞ es el espacio de las funciones T -periódicas, infinitamente diferenciables, de \mathbb{R} en \mathbb{R}^N . Denotaremos por H_T^1 al espacio de Hilbert $W_T^{1,2}$ con el producto escalar

$$((u|v)) = \int_0^T [(u(t)|v(t)) + (\dot{u}(t)|\dot{v}(t))] dt \quad (115)$$

El funcional Ψ que corresponde al problema (110) en H_T^1 viene dado por

$$\Psi(u) = \int_0^T [|\dot{u}(t)|^2/2 + F(t, u(t))] dt. \quad (116)$$

El funcional Ψ es continuamente diferenciable y w.l.s.c. en H_T^1 .

Si damos alguna hipótesis sobre F de tal forma que Ψ sea coercivo entonces utilizando el teorema dado obtendremos la existencia de un mínimo para Ψ y por tanto, al menos una solución para (110).

TEOREMA 17. Supongamos que F verifica la condición (A) y que existe $g \in L^1(0, T)$ tal que

$$|\nabla F(t, x)| \leq g(t) \quad \text{para casi todo } t \in [0, T] \text{ y todo } x \in \mathbb{R}^N. \quad (117)$$

Si

$$\int_0^T F(t, u(t)) dt \rightarrow \infty \quad \text{como } |x| \rightarrow \infty, \quad (118)$$

entonces el problema (110) tiene al menos una solución la cual minimiza Ψ en H_T^1 .

25 Teorema del paso de montaña de Ambrosetti-Rabinowitz

Estudiaremos en lo que sigue la existencia de puntos estacionarios de un funcional J sobre un espacio de Hilbert H diferentes de mínimos y máximos. Estos puntos serán encontrados por medio de procedimientos de tipo min-max. Este tipo de resultados es fundamental en el caso de funcionales que no son acotados inferior y superiormente.

DEFINICIÓN 7. Sea $\varphi : H \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable y $c \in \mathbb{R}$. Decimos que φ verifica la condición de Palais-Smale (PS) si para cualquier sucesión $\{u_n\}$ en H tal que $\varphi(u_n)$ es acotada y $\nabla \varphi(u_n) \rightarrow 0$ como $n \rightarrow \infty$, tiene una subsucesión convergente. Diremos que φ cumple la condición de $(PS)_c$ si para cualquier sucesión $\{u_n\}$ en H tal que $\varphi(u_n) \rightarrow c$ y $\nabla \varphi(u_n) \rightarrow 0$ como $n \rightarrow \infty$, tiene una subsucesión convergente.

Vamos a considerar funcionales J con ciertas características geométricas:

PM-1 $J \in C^1(H, \mathbb{R})$, $J(0) = 0$ y existen constantes positivas $r, \rho > 0$ tal que $J(u) \geq \rho$ para todo $u \in S_r = \{u \in H : |u| = r\}$;

PM-2 $\exists e \in H$ con $|e| > r$ tal que $J(e) \leq 0$.

Obsérvese que ahora sólo necesitamos acotación del funcional en S_r .

Sea Γ la clase de todos los caminos que unen $u = 0$ con $u = e$, más precisamente:

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0, 1], H) : \gamma(0) = 0, \gamma(1) = e\}. \quad (119)$$

Claramente $\Gamma \neq \emptyset$, en efecto, $\gamma(t) = te$ pertenece a Γ .

Llamemos

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} J(\gamma(t)) \quad (120)$$

y puesto que $\gamma \in \Gamma$ cruza S_r entonces (PM-1) implica que

$$c \geq \min_{u \in S_r} J(u) \geq \rho > 0. \quad (121)$$

TEOREMA 18 (Paso de montaña AR). Supongamos que $J \in C^1(H, \mathbb{R})$ verifica (PM-1) y (PM-2). Tomemos c definido por (120) y J tal que cumpla con $(PS)_c$. Entonces c es un nivel crítico positivo de J , es decir, existe $z \in H$ tal que $J(z) = c$ y $J'(z) = 0$.

26 Nuestra primera aplicación del teorema del MP de AR

es encontrar soluciones positivas del siguiente problema con condiciones al borde superlineal

$$-\Delta u(x) = f(x, u(x)) \quad x \in \Omega \quad (122)$$

$$u(x) = 0 \quad x \in \partial\Omega \quad (123)$$

donde, $f : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ se comporta como $\lambda u + u^p$ cuando $u \searrow 0$ y cuando $u \rightarrow \infty$. Vamos a suponer $f(x, u) = 0$ para todo $u < 0$ ya que nos interesan soluciones positivas. Supondremos también que f es localmente Hölder continua, verifica:

existen $a_1 \in L^{\frac{2n}{n+2}}(\Omega)$ y $a_2 > 0$ tal que

$$|f(x, u)| \leq a_1(x) + a_2|u|^p \quad \forall (x, u) \in \Omega \times \mathbb{R} \quad (124)$$

donde $1 < p < \frac{n+2}{n-2}$, y también

$$\lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{f(x, u)}{u} = \lambda > 0 \quad \text{c.t.p.} \quad x \in \Omega; \quad (125)$$

$$\exists r > 0, \theta \in]0, \frac{1}{2}[: 0 < F(x, u) \leq \theta u f(x, u) \quad x \in \Omega, u \geq r \quad (126)$$

F como antes. La última hipótesis es la superlinealidad.

Nuevamente, $E = H_0^1(\Omega)$, con norma $\|u\|^2 = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx$. Con estas notaciones, las soluciones de (122), (123) son los puntos críticos en E del funcional

$$J(u) = \frac{1}{2} \|u\|^2 - \Phi(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \int_{\Omega} F(x, u) dx, \quad (127)$$

Una aplicación directa del MP nos lleva a encontrar al menos una solución no negativa de (122), (123) para $\lambda < \lambda_1$ la misma que por el principio del máximo es positiva.

27 Soluciones múltiples para problemas no lineales que aparecen en Astrofísica. Caso en ausencia de gravedad

El modelo en ausencia de la gravedad:

$$-\Delta u + c(x)u = \lambda f(u) \quad \text{en } \mathbb{R}_+^n \quad (128)$$

$$u(z, 0) = h(z) \quad \forall z \in \mathbb{R}^{n-1} \quad (129)$$

donde $f:]-\infty, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, satisface:

1. Existe $s_0 > 0$ tal que $f(s) > 0, \forall s \in]0, s_0[$
2. $f(s) = 0$ para $s \leq 0$ o $s \geq s_0$
3. $f(s) \leq as^\sigma, a \in \mathbb{R}, a > 0$ y $1 < \sigma < \frac{n+2}{n-2}$ si $n > 2$ o $\sigma > 1$ si $n=2$
4. Existe $l > 0$ tal que $|f(s_1) - f(s_2)| \leq l|s_1 - s_2|$ para todo $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$

y h acotada no negativa, no idénticamente nula, mín $h < s_0$ y $c \geq 0, c \in L^\infty(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.

NOTA 10. Las hipótesis dadas sobre f están relacionadas con el fenómeno físico estudiado. Un ejemplo de función que verifica las hipótesis de f se presenta en nuestro trabajo con Fernando Dobarro en la página 219.

Dominios acotados

Si notamos por τ la solución de,

$$-\Delta \tau + c(x)\tau = 0 \quad \text{en } \Omega \quad (130)$$

$$\tau = h(x) \quad \text{en } \partial\Omega \quad (131)$$

tendremos que el problema

$$\begin{cases} -\Delta u + c(x)u = \lambda f(u) & \text{en } \Omega \\ u = h(x) & \text{en } \partial\Omega \end{cases} \quad (132)$$

es equivalente a

$$\begin{cases} -\Delta \omega + c(x)\omega = \lambda f(\omega + \tau) & \text{en } \Omega \\ \omega = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases} \quad (133)$$

donde $\omega = u - \tau$, y f, c, h definidas como en la sección anterior.

El problema (133), será estudiado en lugar de (132).

Como f es positiva, el *Principio del Máximo* asegura que

$$\inf_{\partial\Omega} \omega \leq \inf_{\Omega} \omega \quad (134)$$

además $u=0$ es solución de (133) si y solo si $\lambda = 0$, puesto que $\min h < s_0$. Luego toda solución de (133) es estrictamente positiva.

Por otro lado en (130) τ alcanza su máximo y su mínimo sobre la frontera

$$\inf_{\partial\Omega} \tau \leq \tau(x) \leq \sup_{\partial\Omega} \tau \quad (135)$$

Trabajamos en el espacio $H_0^1(\Omega)$, con $\|u\|^2 = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx$ y definimos, para todo τ no negativo t.q. $\|\tau\|_{L^{\sigma+1}(\Omega)} \doteq \Gamma < \infty$, el C^1 funcional $\Phi_{\lambda,\tau} : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$\Phi_{\lambda,\tau}(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \{|\nabla u|^2 + c(x)u^2\} - \lambda \int_{\Omega} F(u + \tau) \quad (136)$$

donde, $F(s) = \int_0^s f(t)dt$.

Al realizar la formulación variacional de (133) se obtiene

$$\int_{\Omega} \nabla \omega \nabla v + c(x)\omega v = \lambda \int_{\Omega} f(\omega + \tau)v \quad \forall v \in C_c^\infty(\Omega) \quad (137)$$

luego es claro que si u es un punto crítico de $\Phi_{\lambda,\tau}$ (i.e. $u \in H_0^1(\Omega)$ t.q. $\Phi'_{\lambda,\tau}(u) = 0$, donde $\Phi'_{\lambda,\tau}$ es el gradiente de $\Phi_{\lambda,\tau}$) entonces u es una solución débil de (133) y por regularidad una solución fuerte.

Como f es acotado se prueba con facilidad que $\Phi_{\lambda,\tau}$ es coercivo y verifica Palais-Smale para todo λ no negativo. Además $\Phi_{\lambda,\tau}$ alcanza su ínfimo global en una función $u_{\lambda,\tau}$ para todo λ no negativo.

TEOREMA 19 (1). Si f verifica las hipótesis dadas se tiene que, para todo $\Gamma > 0$ suficientemente pequeño, existe un intervalo $]\underline{\lambda}, \bar{\lambda}(\Gamma)[$, con $\underline{\lambda} > 0$, tal que para todo $\lambda \in]\underline{\lambda}, \bar{\lambda}(\Gamma)[$ el problema (133) tiene al menos tres soluciones positivas. Más aún, $\bar{\lambda}(\Gamma) \rightarrow \infty$ si $\Gamma \rightarrow 0$.

En la demostración del **teorema** [1] se buscan dos soluciones que corresponden a mínimos y una de paso de montaña.

LEMA 2 (1). Existe $\hat{\omega}_0 \geq 0$, $\hat{\omega}_0$ no idénticamente nula, y $\underline{\lambda} > 0$ tal que para todo $\lambda > \underline{\lambda}$ y para todo $\tau \geq 0$, $\Phi_{\lambda,\tau}(\hat{\omega}_0) < 0$.

Demostración. Notemos $B_r(x_0)$ la bola de centro x_0 y radio r . Sea $x_0 \in \Omega$ y $R > 0$ tal que $B_R(x_0) \subset \Omega$. Luego para todo $0 < \delta < R$, $B_\rho(x_0) \subset B_R(x_0)$, donde $\rho = R - \delta$.

Definimos

$$\hat{\omega}_{\delta,R}(x) = \begin{cases} s_0 & \text{si } |x - x_0| \leq \rho \\ \frac{s_0}{\delta}(R - |x - x_0|) & \text{si } \rho \leq |x - x_0| \leq R \\ 0 & \text{si } |x - x_0| \geq R \end{cases}$$

aplicando las desigualdades de Hölder y Poincaré

$$\Phi_{\lambda,\tau}(\hat{\omega}_{\delta,R}) = \frac{1}{2} \|\hat{\omega}_{\delta,R}\|^2 + \frac{1}{2} \int_{\Omega} c(x)(\hat{\omega}_{\delta,R})^2 dx - \lambda \int_{\Omega} F(\hat{\omega}_{\delta,R} + \tau) dx$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{2}\|\hat{\omega}_{\delta,R}\|^2 + \frac{1}{2}\int_{B_R(x_0)} c(x)(\hat{\omega}_{\delta,R})^2 dx - \lambda \int_{B_\rho(x_0)} F(s_0 + \tau) dx \\
&\leq \frac{1}{2}\|\hat{\omega}_{\delta,R}\|^2 + \frac{\|c\|_{L^\infty} R^2}{2}\|\hat{\omega}_{\delta,R}\|^2 - \lambda F(s_0) \int_{B_\rho(x_0)} dx \\
&= \frac{s_0^2(1 + \|c\|_{L^\infty} R^2)}{2\delta^2} \int_{B_R(x_0) - B_\rho(x_0)} dx - \lambda F(s_0) \int_{B_\rho(x_0)} dx \\
&= \frac{s_0^2(1 + \|c\|_{L^\infty} R^2)(R^n - (R - \delta)^n)\omega_{n-1}}{2n\delta^2} - \lambda \frac{F(s_0)(R - \delta)^n\omega_{n-1}}{n}
\end{aligned}$$

donde ω_{n-1} representa la medida de la esfera unitaria $\partial B_1(0)$ en \mathbb{R}^n . Fijamos

$$\underline{\lambda}(\delta) \equiv \frac{s_0^2(1 + \|c\|_{L^\infty} R^2)(R^n - (R - \delta)^n)}{2F(s_0)\delta^2(R - \delta)^n}$$

Si $\delta = tR$, $0 < t < 1$, se obtiene

$$\underline{\lambda}(\delta) = \frac{s_0^2(1 + \|c\|_{L^\infty} R^2)}{2F(s_0)R^2} \left(\frac{1 - (1 - t)^n}{t^2(1 - t)^n} \right).$$

entonces

$$\Phi_{\lambda,\tau}(\hat{\omega}_{\delta,R}) < 0 \quad \forall \lambda > \underline{\lambda}(\delta) > 0 \quad y \quad \forall \tau \geq 0$$

Sea

$$\psi(t) \equiv \frac{1 - (1 - t)^n}{t^2(1 - t)^n}$$

y t_1 tal que $\psi(t_1) = \min_{]0,1[} \psi(t)$. Sea $\delta_1 = t_1 R$, $\hat{\omega}_o = \hat{\omega}_{\delta_1,R}$ y $\underline{\lambda} = \underline{\lambda}(\delta_1)$, entonces se tiene

$$\Phi_{\lambda,\tau}(\hat{\omega}_o) < 0 \quad \forall \lambda > \underline{\lambda} > 0 \quad y \quad \forall \tau \geq 0$$

por otro lado

$$\|\hat{\omega}_o\| = s_0 \left(\frac{\omega_{n-1}}{n} \right)^{\frac{1}{2}} R^{\frac{n-2}{2}} \left(\frac{1 - (1 - t_1)^n}{t_1^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

□

LEMA 3 (2). Existe una constante $K = K(a, \sigma, \Omega)$ tal que para todo $\lambda < \bar{\lambda}(\Gamma)$ y $\|u\| = \Gamma$, $\Phi_{\lambda,\tau}(u) > 0$ donde $\bar{\lambda} = K\Gamma^{1-\sigma}$.

Demostración. Por (f-3)

$$\int_{\Omega} F(u + \tau) dx = \int_{\Omega} \int_0^{u+\tau} f(t) dt dx \leq \int_{\Omega} \frac{a(u + \tau)^{\sigma+1}}{\sigma + 1} dx$$

luego utilizando desigualdades de Sobolev y Poincaré

$$\begin{aligned}
\Phi_{\lambda,\tau}(u) &= \frac{1}{2}\|u\|^2 + \frac{1}{2}\int_{\Omega} c(x)u^2 dx - \lambda \int_{\Omega} F(u + \tau) dx \\
&\geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \lambda \int_{\Omega} \frac{a(u + \tau)^{\sigma+1}}{\sigma + 1} dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \lambda \left(\frac{a}{\sigma+1} \right) (\|u\|_{L^{\sigma+1}(\Omega)} + \|\tau\|_{L^{\sigma+1}(\Omega)})^{\sigma+1} \\
&\geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \lambda \left(\frac{a}{\sigma+1} \right) (\hat{C}(\Omega)\|u\| + \Gamma)^{\sigma+1}
\end{aligned}$$

donde $\hat{C}(\Omega)$ es una constante que depende de Ω . Si elegimos u tal que $\|u\| = \Gamma$, se tiene

$$\Phi_{\lambda,\tau}(u) \geq \Gamma^2 \left(\frac{1}{2} - \lambda \left(\frac{a}{\sigma+1} \right) \Gamma^{\sigma-1} (\hat{C}(\Omega) + 1)^{\sigma+1} \right)$$

Fijamos

$$K = \frac{\sigma+1}{2a(\hat{C}(\Omega) + 1)^{\sigma+1}}$$

entonces para todo $\lambda < \bar{\lambda}(\Gamma) \equiv K\Gamma^{1-\sigma}$, se tiene $\Phi_{\lambda,\tau}(u) > 0$. \square

NOTA 11 (4). De la definición de $\bar{\lambda}(\Gamma)$ se concluye que $\bar{\lambda}(\Gamma) \rightarrow \infty$ si $\Gamma \rightarrow 0$.

NOTA 12. Como $\tau > 0$, no idénticamente nula y $\min \tau < s_0$ se tiene que para todo $0 < \lambda$ y para todo $v \geq 0$, v no nula, $\Phi_{\lambda,\tau}(0)$ y $\Phi'_{\lambda,\tau}(0)(v)$ son negativos.

LEMA 4 (3). Para todo $0 < \lambda < \bar{\lambda}(\Gamma)$ existe $\bar{u} \in H_0^1$ con $\|\bar{u}\| < \Gamma$ tal que $\Phi_{\lambda,\tau}(\bar{u}) < 0$ y $\Phi'_{\lambda,\tau}(\bar{u}) = 0$.

Demostración. Del lema (3) conocemos que $\Phi_{\lambda,\tau}(u) > 0$, para todo $0 < \lambda < \bar{\lambda}(\Gamma)$ y $\|u\| = \Gamma$; además $\Phi_{\lambda,\tau}(0) < 0$ y $\Phi'_{\lambda,\tau}(0)(v) \neq 0$. Considerando la solución de la ecuación

$$\begin{aligned}
\frac{d\alpha}{dt} &= W(\alpha(t)) \\
\alpha(0) &= 0
\end{aligned}$$

donde $W=V$, V campo vectorial pseudo-gradiente para $\Phi_{\lambda,\tau}$ en el conjunto de los puntos regulares de $\Phi_{\lambda,\tau}$, con $0 < \lambda < \bar{\lambda}$. Puesto que $\Phi_{\lambda,\tau}$ verifica Palais-Smale y es acotado por abajo, por el teorema 5.4 de Palais (1966) se tiene

1. $\alpha : [0, +\infty[\rightarrow H_0^1(\Omega)$, continua
2. $\Phi_{\lambda,\tau}(\alpha(t))$ estrictamente decreciente
3. $\alpha(t) \rightarrow \bar{u}$ cuando $t \rightarrow +\infty$, $\Phi'_{\lambda,\tau}(\bar{u}) = 0$

por lo cual \bar{u} verifica las condiciones requeridas. \square

Prueba del teorema (19)

Demostración. Sean $\hat{\omega}_0$ y $\underline{\lambda}$ los definidos en el lema (2), por el lema (3) para $\Gamma < \|\hat{\omega}_0\|$, existe $\bar{\lambda}(\Gamma) > 0$ tal que, $\Phi_{\lambda,\tau}(u) > 0$ para todo $\lambda < \bar{\lambda}$ y $\|u\| = \Gamma$. Como $\underline{\lambda}$ es independiente de Γ , usando la Observación (11) para Γ suficientemente pequeño se tiene que $\underline{\lambda} < \bar{\lambda}(\Gamma)$.

Ahora para $\underline{\lambda} < \lambda < \overline{\lambda}(\Gamma)$ los lemas (2) y (3) se verifican. Consideremos la solución de la ecuación

$$\begin{aligned}\frac{d\beta}{dt} &= W(\beta(t)) \\ \beta(0) &= \hat{\omega}_0\end{aligned}$$

y por argumentos similares a los del lema (4), existe $\hat{u} \in H_0^1$, con $\|\hat{u}\| > \Gamma$ tal que, $\Phi'_{\lambda,\tau}(\hat{u}) = 0$.

Definimos

$$c \equiv \inf_{\delta \in \Theta} \sup_{u \in \delta} \Phi_{\lambda,\tau}(u) \quad (138)$$

donde

$$\Theta = \{\gamma \in C([0,1], H_0^1(\Omega)) : \gamma(0) = 0, \gamma(1) = \hat{\omega}_0\} \quad (139)$$

aplicando el “teorema del paso de montaña” de Ambrosetti-Rabinowitz, ver Ambrosetti y Rabinowitz (1973), c se alcanza en una función $\tilde{u} \in H_0^1(\Omega)$.

Finalmente por el lema (4) se concluye la demostración. \square

Dominios acotados arbitrariamente grandes

Ahora estudiaremos el problema (133) con $c > 0$ y Ω arbitrariamente grande, esto es, existe $x_0 \in \Omega$ tal que la bola de centro x_0 y radio R este contenida en Ω , con R arbitrariamente grande. En este parágrafo $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$.

Siguiendo el mismo esquema de la sección anterior probaremos la existencia de intervalos $\Lambda \subset \mathbb{R}^+$, tal que para todo $\lambda \in \Lambda$ y todo Γ (133) tiene al menos tres soluciones positivas.

Sea $W_0^{1,2}(\Omega)$ el espacio usual de Sobolev con la norma: $\|u\|^2 = \int_{\Omega} [u^2 + |\nabla u|^2] dx$ y $\Gamma \equiv \|\tau\|_{L^2(\Omega)}$.

Si $\inf c(x) > 0$, entonces

$$\|u\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}^2 \leq \frac{1}{m_1} \int_{\Omega} [c(x)u^2 + |\nabla u|^2] dx \quad (140)$$

donde $m_1 = \min\{\inf c(x), 1\}$

A continuación se enuncia el teorema principal

TEOREMA 20 (2). Bajo las hipótesis anteriores (f-1-2-3-4). Para R suficientemente grande y para todo $\Gamma > 0$, existe un intervalo $]\underline{\lambda}(R), \overline{\lambda}[$, con $\underline{\lambda}(R) > 0$, tal que, para todo $\lambda \in]\underline{\lambda}, \overline{\lambda}[$ el problema (133) tiene al menos tres soluciones positivas. Además, $\underline{\lambda}(R) \rightarrow 0$ cuando $R \rightarrow \infty$.

Para demostrar el teorema (20) es necesario definir convenientemente $\underline{\lambda}$ y $\overline{\lambda}$. Por ello, si definimos

$$\omega_{\delta,R}(x) = \begin{cases} s_0/\delta^{\frac{1}{4}} & \text{si } |x - x_0| \leq \rho \\ \frac{s_0}{\delta^{\frac{1}{4}}}(R - |x - x_0|) & \text{si } \rho \leq |x - x_0| \leq R \\ 0 & \text{si } |x - x_0| \geq R, \end{cases} \quad (141)$$

donde $R > 0$ es el radio de la bola $B_R(x_0) \subset \Omega$, $0 < \delta < R$ y $\rho = R - \delta$, entonces operando obtenemos $\hat{\omega}_0$ tal que

$$\Phi_{\lambda,\tau}(\hat{\omega}_0) < 0 \quad \forall \lambda > \underline{\lambda} > 0 \quad y \quad \forall \tau \geq 0 \quad (142)$$

para

$$\underline{\lambda}(R) = \frac{s_0^2(1 + \|c\|_{L^\infty} R^2)}{2F(\tau(x_0))R^{\frac{5}{2}}} \left(\frac{1 - (1 - t_1)^n}{t_1^{\frac{5}{2}}(1 - t_1)^n} \right). \quad (143)$$

y también

$$\|\hat{\omega}_0\| = s_0 \left(\frac{\omega_{n-1}}{n} \right)^{\frac{1}{2}} R^{\frac{2n-5}{4}} \left(\frac{1 - (1 - t_1)^n}{t_1^{\frac{5}{2}}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (144)$$

gracias a la modificación realizada, para $n \geq 3$

$$\|\hat{\omega}_0\| \rightarrow \infty \quad si \quad R \rightarrow \infty \quad (145)$$

NOTA 13. Nótese que esta construcción no funciona en el caso $n = 2$

LEMA 5. Existe $\bar{\lambda}$ tal que para todo $\lambda < \bar{\lambda}$ y $\|u\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} = \Gamma$, $\Phi_{\lambda,\tau}(u) > 0$.

NOTA 14 (7).

$$\bar{\lambda} \doteq \frac{m_1}{4b} \quad (146)$$

con

$$b \doteq \sup_{s>0} \frac{2F(s)}{s^2} < +\infty \quad (147)$$

De la definición de $\underline{\lambda}$ y $\bar{\lambda}$ se sigue que $\underline{\lambda} \rightarrow 0$ si $R \rightarrow \infty$, luego para R grande, $\underline{\lambda} < \bar{\lambda}$.

Resumen de la prueba del teorema (20)

Demostración. Sean $\hat{\omega}_0$ y $\underline{\lambda}(R)$ definidos como antes, por el lema existe $\bar{\lambda} > 0$ tal que, $\Phi_{\lambda,\tau}(u) > 0$ para todo $\lambda < \bar{\lambda}$ y $\|u\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} = \Gamma$. De la observación (14) para R suficientemente grande $\underline{\lambda} < \bar{\lambda}$ y $\|\hat{\omega}_0\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} > \Gamma$. Finalmente, con razonamientos análogos a los realizados en la demostración del teorema (19), se concluye con la prueba. \square

NOTA 15. Recalquemos que la demostración del teorema no es posible hacerla para el caso $n = 2$ si se usa esta técnica. En nuestro trabajo MC, Dobarro, teorema 8, logramos probar (cuando $c(x) = 0$) que para semi discos grandes el problema (133) tiene al menos tres soluciones positivas. En ese trabajo se utilizan sub soluciones y super soluciones.

El problema en \mathbb{R}_+^n

Sea $W_0^{1,2}(\mathbb{R}_+^n)$ y $V_{c,0}^{1,2}(\mathbb{R}_+^n)$ las completaciones de $C_0^\infty(\mathbb{R}_+^n)$ con $(\|\cdot\|_{L^2}^2 + \|\nabla(\cdot)\|_{L^2}^2)^{\frac{1}{2}}$ y $(\|c(x) \cdot \|\cdot\|_{L^2}^2 + \|\nabla(\cdot)\|_{L^2}^2)^{\frac{1}{2}}$ respectivamente, donde $\|\cdot\|_{L^2}$ representa la norma usual en $L^2(\mathbb{R}_+^n)$.

Si $\inf c(x) > 0$, entonces por (140), $W_0^{1,2}(\mathbb{R}_+^n) \approx V_{c,0}^{1,2}(\mathbb{R}_+^n)$

Definimos para todo $\lambda \geq 0$ y para todo τ tal que $\|\tau\|_{L^{\sigma+1}(\mathbb{R}_+^n)} < \infty$, el funcional $\Phi_{\lambda,\tau,\infty} : W_0^{1,2}(\mathbb{R}_+^n) \rightarrow \mathbb{R}$ de la forma:

$$\Phi_{\lambda,\tau,\infty}(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}_+^n} [c(x)u^2 + |\nabla u|^2] dx - \lambda \int_{\mathbb{R}_+^n} F(u + \tau) dx \quad (148)$$

donde $F(s) = \int_0^s f(t)dt$. Se verifica que $\Phi_{\lambda,\tau,\infty}$ es un C^1 funcional, luego si $u \in W_0^{1,2}(\mathbb{R}_+^n)$ es un punto crítico de $\Phi_{\lambda,\tau,\infty}$ entonces u es una solución débil y por regularidad una solución clásica de

$$\begin{aligned} -\Delta\omega + c(x)\omega &= \lambda f(\omega + \tau) & \text{en } & \mathbb{R}_+^n \\ \omega(z, 0) &= 0 & \forall z \in & \mathbb{R}^{n-1} \end{aligned}$$

PROPOSICIÓN 3. i) Sea $m_1 > 0$, como antes, entonces para todo $\lambda < \frac{m_1}{b}$, $\Phi_{\lambda,\tau,\infty}$ es coercivo y acotado por abajo.

ii) Para todo $\lambda < \frac{\inf c(x)}{l}$

$$\begin{aligned} -\Delta\omega + c(x)\omega &= \lambda f(\omega + \tau) & \text{en } & \mathbb{R}_+^n \\ \omega(z, 0) &= 0 & \forall z \in & \mathbb{R}^{n-1} \end{aligned} \quad (149)$$

tiene a lo más una solución en $W_0^{1,2}(\mathbb{R}_+^n)$.

Consideremos ahora el problema

$$\begin{aligned} -\Delta\omega + c(x)\omega &= \lambda f(\omega + \tau) & \text{en } & D_R \\ \omega &= 0 & \text{en } & \partial D_R \end{aligned}$$

donde

$$D_R = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n : \sum_{i=1}^n x_i^2 < R^2 \right\} \quad (150)$$

y definamos $\Phi_{\lambda,\tau,R} : W_0^{1,2}(D_R) \rightarrow \mathbb{R}$ de manera análoga a $\Phi_{\lambda,\tau,\infty}$. Se verifica con facilidad que si $R' \geq R$, entonces

$$W_0^{1,2}(D_R) \subset W_0^{1,2}(D_{R'}) \subset W_0^{1,2}(\mathbb{R}_+^n) \quad (151)$$

Más aún, para todo $u \in W_0^{1,2}(D_R)$, $\Phi_{\lambda,\tau,\infty}(u) \leq \Phi_{\lambda,\tau,R'}(u) \leq \Phi_{\lambda,\tau,R}(u)$, precisamente:

$$\Phi_{\lambda,\tau,R'}(u) = \Phi_{\lambda,\tau,R}(u) - \lambda \int_{D_{R'} - D_R} F(\tau) dx \quad (152)$$

LEMA 6. Existe una constante positiva $C = C(a, \sigma, C_s, m_1)$ tal que para todo $\lambda < \lambda^*(\|\tau\|_{L^{\sigma+1}(\mathbb{R}_+^n)})$

y para todo u que verifique $\|u\|_{W_0^{1,2}(\mathbb{R}_+^n)} = \|\tau\|_{L^{\sigma+1}(\mathbb{R}_+^n)}$, $\Phi_{\lambda,\tau,\infty}(u) > 0$. Además, para todo $u \in W_0^{1,2}(D_R)$ tal que $\|u\|_{W_0^{1,2}(D_R)} = \|\tau\|_{L^{\sigma+1}(\mathbb{R}_+^n)}$, $\Phi_{\lambda,\tau,R}(u) > 0$

LEMA 7. (E) Para todo $0 < \lambda < \lambda^*(\|\tau\|_{L^{\sigma+1}(\mathbb{R}_+^n)})$ existe $\bar{u}_R \in W_0^{1,2}(D_R)$ con $\|\bar{u}_R\|_{W_0^{1,2}(D_R)} < \|\tau\|_{L^{\sigma+1}(\mathbb{R}_+^n)}$ tal que $\Phi_{\lambda,\tau,R}(\bar{u}) < 0$ y $\Phi'_{\lambda,\tau,R}(\bar{u}) = 0$

Es posible aproximar soluciones de

$$\begin{aligned} -\Delta\omega + c(x)\omega &= \lambda f(\omega + \tau) & \text{en} & \mathbb{R}_+^n \\ \omega(z, 0) &= 0 & \forall z \in & \mathbb{R}^{n-1} \end{aligned}$$

con soluciones de

$$\begin{aligned} -\Delta\omega + c(x)\omega &= \lambda f(\omega + \tau) & \text{en} & D_R \\ \omega &= 0 & \text{en} & \partial D_R, \end{aligned}$$

para R suficientemente grande.

LEMA 8. Sean f, τ definidos como antes y $\lambda \in \mathbb{R}_+$. Además $(R_n)_n$ una sucesión en \mathbb{R}_+ tal que $R_n \rightarrow \infty$ y $(u_n) \in W_0^{1,2}(D_{R_n})$ una sucesión de soluciones positivas de

$$\begin{aligned} -\Delta\omega + c(x)\omega &= \lambda f(\omega + \tau) & \text{en} & D_{R_n} \\ \omega &= 0 & \text{en} & \partial D_{R_n}, \end{aligned} \quad (153)$$

acotadas en $W_0^{1,2}(\mathbb{R}_+^n)$, entonces existe una subsucesión (que escribiremos igualmente $(u_n)_n$ y una función $u \in W_0^{1,2}(\mathbb{R}_+^n)$ tal que $u_n \rightarrow u$ débilmente en $W_0^{1,2}(\mathbb{R}_+^n)$ y u es una solución clásica de

$$\begin{aligned} -\Delta\omega + c(x)\omega &= \lambda f(\omega + \tau) & \text{en} & \mathbb{R}_+^n \\ \omega(z, 0) &= 0 & \forall z \in & \mathbb{R}^{n-1} \end{aligned} \quad (154)$$

De la proposición y los lemas anteriores podemos enunciar el siguiente teorema:

TEOREMA 21. (F) Sean: Γ, f, τ y λ^* definidas como antes. Entonces para todo $\lambda, 0 < \lambda < \lambda^*$, el mínimo local \bar{u}_R de $\Phi_{\lambda,\tau,R}$ obtenido en el lema (E), aproxima el mínimo local u_∞ de $\Phi_{\lambda,\tau,\infty}$ en B_Γ (la bola de centro 0 y radio Γ de $W_0^{1,2}(\mathbb{R}_+^n)$).

Además, si λ es suficientemente pequeño, es decir, $0 < \lambda < \frac{\inf c(x)}{1}$, entonces $v_\infty \equiv \inf_{B_\Gamma} \Phi_{\lambda,\tau,\infty}$, es alcanzado en u_∞ mínimo global y único punto crítico de $\Phi_{\lambda,\tau,\infty}$,

28 Aplicaciones a sistemas de ecuaciones parciales

En lo que sigue vamos a considerar la existencia de soluciones para sistemas de ecuaciones elípticas de la forma

$$-\Delta u = f(x, u, v), \quad -\Delta v = g(x, u, v) \in \Omega \quad (155)$$

En las ecuaciones de arriba u y v son funciones a valores reales $u, v : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ donde Ω es algún dominio en $\mathbb{R}^N, N \geq 3$, y $\bar{\Omega}$ es la clausura de Ω .

Se tiene que el sistema (155) es variacional si una de las siguientes condiciones se cumplen:

- (I) Existe una función diferenciable a valores reales $F(x, u, v)$ para $(x, u, v) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tal que $\frac{\partial F}{\partial u} = f$ y $\frac{\partial F}{\partial v} = g$. En este caso, el sistema se dice gradiente.
- (II) Existe una función diferenciable a valores reales $H(x, u, v)$ para $(x, u, v) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tal que $\frac{\partial H}{\partial u} = g$ y $\frac{\partial H}{\partial v} = f$. En este caso, el sistema se dice Hamiltoniano.

La terminología variacional viene del hecho que en ambos casos, el sistema de la lámina anterior es la ecuación de Euler-Lagrange de un funcional naturalmente asociado al sistema. En efecto, si trabajamos con funciones u y v en $H_0^1(\Omega)$, el funcional asociado al sistema gradiente es

$$\Phi(u, v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2) - \int_{\Omega} F(x, u, v), \quad (156)$$

mientras que el funcional asociado al sistema Hamiltoniano es

$$\Phi(u, v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\nabla u |\nabla v|) - \int_{\Omega} H(x, u, v), \quad (157)$$

apenas F y H tengan el apropiado crecimiento para su integrabilidad. Estos dos tipos de problemas pueden ser estudiados usando la teoría de Puntos Críticos.

29 Sistemas gradientes de ecuaciones parciales

Consideramos el sistema de ecuaciones

$$-\Delta u = f(x, u, v), \quad -\Delta v = g(x, u, v) \in \Omega \quad (158)$$

con condiciones de frontera Dirichlet homogéneas, es decir, $u = v = 0$ sobre $\partial\Omega$. En el contexto de los métodos variacionales, miraremos soluciones débiles, es decir soluciones en el espacio de Sobolev $H_0^1(\Omega)$. Vamos a buscar estas soluciones como puntos críticos del funcional

$$\Phi(u, v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2) - \int_{\Omega} F(x, u, v), \quad (159)$$

cuyas ecuaciones de Euler-Lagrange son precisamente las formas débiles de las ecuaciones (158), esto es

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla \phi = \int_{\Omega} F_u(x, u, v) \phi, \quad \int_{\Omega} \nabla v \nabla \phi = \int_{\Omega} F_v(x, u, v) \phi \quad (160)$$

para todo $\phi \in H_0^1(\Omega)$. El funcional (159) está definido en el producto cartesiano $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$. Del teorema de inmersión de Sobolev, requeriremos

F1 $F : \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sea \mathcal{C}^1 y

$$|F_u(x, u, v)| \leq C(1 + |u|^{2^*-1} + |v|^{2^*-1}) \quad (161)$$

$$|F_v(x, u, v)| \leq C(1 + |u|^{2^*-1} + |v|^{2^*-1}) \quad (162)$$

donde $2^* = \frac{2N}{N-2}$, $N \geq 3$.

Supondremos además

F2

$$|F(x, u, v)| \leq C(1 + |u|^r + |v|^s) \quad (163)$$

con $r, s < 2$ (sublineal)

F3 $F(x, 0, 0) = F_u(x, 0, 0) = F_v(x, 0, 0) = 0$, $\forall x \in \bar{\Omega}$

Esta última hipótesis implica que $u = v = 0$ es una solución de (158)

TEOREMA 22 (Caso coercivo). Supongamos (F1) y (F2). Entonces Φ alcanza su mínimo global en algún punto $(u_0, v_0) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$, que es una solución débil de (158).

El resultado anterior es una consecuencia del teorema de mínimo.

TEOREMA 23 (Caso coercivo, soluciones no triviales). Supongamos (F1), (F3) y (F2). Entonces Φ alcanza su mínimo global en algún punto $(u_0, v_0) \neq (0, 0)$, apenas existen constantes positivas R y $\Theta < 1$ y una función continua $K : \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$F4 \quad F(x, t^{\frac{1}{2}}u, t^{\frac{1}{2}}v) \geq t^{\Theta}K(x, u, v),$$

para $x \in \bar{\Omega}$, $|u|, |v| \leq R$ y $t > 0$ pequeño.

Para el siguiente resultado vamos a suponer (F2') en vez de (F2).

F2'

$$|F(x, u, v)| \leq C(1 + |u|^r + |v|^s) \quad (164)$$

con $0 < r < 2^*$, $0 < s < 2^*$ (subcrítico) y $r, s > 2$ (superlineal)

Para conseguir la hipótesis (PS) se introduce una condición del tipo Ambrosetti-Rabinowitz

F5

$$0 < F(x, u, v) \leq \theta_u u F_u(x, u, v) + \theta_v v F_v(x, u, v) \quad (165)$$

para todo $x \in \bar{\Omega}$ y $|u|, |v| \leq R$, con R algún número positivo y

$$\frac{1}{2^*} < \theta_u, \theta_v < \frac{1}{2}. \quad (166)$$

TEOREMA 24. Supongamos (F1), (F3), (F5) y (F2'). Supongamos también que existen constantes positivas C y ϵ , y números $\bar{r}, \bar{s} > 2$ tales que

F6

$$|F(x, u, v)| \leq C(1 + |u|^{\bar{r}} + |v|^{\bar{s}}) \quad (167)$$

para $|u|, |v| \leq \epsilon, x \in \bar{\Omega}$.

Entonces Φ tiene un punto crítico no trivial.

Este resultado se demuestra utilizando el teorema del paso de montaña de Ambrosetti-Rabinowitz.

NOTA 16. *Sistemas más complicados que los presentados aquí aparecen en física matemática y pueden ser enfrentados por las técnicas variacionales que hemos estudiado antes. Motivados por estos resultados de De Figueiredo nos ha interesado estudiar sistemas de ecuaciones con no linealidades indefinidas y discontinuas, problemas todavía abiertos. Para entender mejor el tipo de soluciones que se deben buscar en los sistemas de ecuaciones indefinidos discontinuos primero estudiamos el caso unidimensional.*

30 Sistemas del tipo Hill

Consideremos el siguiente sistema del tipo Hill,

$$\begin{aligned} -u'' &= \lambda(m(t)f(u) + h(t)f(v)) \quad \text{en }]0, 1[\\ -v'' &= g(t, u) \quad \text{en }]0, 1[\end{aligned}$$

$$u(0) = v(0) = 0,$$

$$u(1) = \zeta_1 u(\alpha); \quad v(1) = \zeta_2 v(\alpha),$$

donde $0 < \zeta_1, \zeta_2 < 1$ y m y h son funciones con salto en α .

Hemos llegado a este tipo de problemas al intentar estudiar sistemas de ecuaciones diferenciales parciales no lineales de la forma:

$$\begin{aligned} -\Delta u &= \lambda m(t)f(u, v) \quad \text{en } \Omega \\ -\Delta v &= g(t, u) \quad \text{en } \Omega, \end{aligned}$$

donde m es una función que cambia signo, f y g son funciones no lineales que pueden ser discontinuas, y $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un abierto suficientemente regular.

Sistemas de ecuaciones diferenciales parciales no lineales han sido estudiados en los últimos años, en este punto cabe destacar los trabajos desarrollados por Jairo Guedes de Figueiredo y que se encuentran sintetizados en el curso dictado en la Escuela sobre ecuaciones diferenciales parciales, ICTP, 2006, donde se analizan los sistemas de tipo gradiente y aquellos del tipo hamiltoniano pero siempre con no linealidades que poseen cierta regularidad.

Problemas no lineales con no linealidades indefinidas han sido estudiados por S. Alama, M. del Pino, G. Tarantello, H. Berestycki, I. Capuzzo-Dolcetta, L. Nirenberg, D. Papini, F. Zanolin, J.S. W. Wong, M. Calahorrano, M. Girardi, M. Matzeu, P. Caldi- lori P. Montecchiari, K. Chang y M. Jiang. El caso de valores propios para funciones peso indefinidas han sido analizados por Anane, Chakrone y Moussa, M. Cuesta. Las ecuaciones diferenciales semilineales elípticas con no linealidades discontinuas

han sido estudiadas exhaustivamente por A. Ambrosetti, C. Stuart, M. Badiale, M. Struwe, D. Arcoya, M. Calahorrano, etc.

Ecuaciones de Hill con pesos indefinidos han sido investigados en particular por D. Papini, F. Zanolin; para una bibliografía más extensa chequear el artículo de D. Papini y F. Zanolin.

En un artículo previo estudiamos el caso de una sola ecuación del tipo Hill y probamos la existencia de al menos una solución, con técnicas similares a las que utilizan A. Castro, A. Kurepa, I. Ali, R. Shivaji, en sus trabajos relacionados a problemas no lineales del tipo semipositone. Introducimos también la función que R. Manásevich y F. Zanolin denominan el time mapping. En el presente trabajo haremos también uso de estas técnicas.

31 Caso de una sola ecuación en una dimensión

En esta sección, por completitud, vamos a describir algunos resultados que aparecen en Calahorrano (2007) y que nos serán de utilidad en el presente trabajo.

Se estudia la existencia de soluciones positivas para problemas a valores al borde:

$$\begin{aligned} -u'' &= \lambda m(x)f(u) \quad \text{en }]0,1[\\ u(0) &= u(1) = 0, \end{aligned}$$

donde $\lambda > 0$, $m \in \mathcal{PC}[0,1]^1$, m cambia signo y f es una función no lineal con condiciones de crecimiento en cero y en el infinito.

Por simplicidad, supondremos que $m :]0,1[\rightarrow \mathbb{R}$ es tal que

$$m(x) = \begin{cases} -1, & \alpha < x < 1, \\ 1, & 0 < x < \alpha, \end{cases}$$

con $\alpha \in]0,1[$.

Consideremos las siguientes hipótesis para la función $f \in \mathcal{C}^2$:

(A) f es tal que:

$$\begin{aligned} f''(s) &> 0 \quad \text{para } s \geq 0, \\ f(0) &= 0, \\ f(s) - sf'(s) &< 0 \quad \text{para } s > 0. \end{aligned}$$

(B) f verifica las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} f(0) &= 0, \\ \text{Existe } s_0 &> 0 \text{ tal que} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(s) &> 0 \quad \text{para } s \in [0, s_0[, \text{ y} \\ f''(s) &\geq 0 \quad \text{para } s \in [s_0, +\infty[\end{aligned}$$

¹ $\mathcal{PC}[0,1]$ es el conjunto de funciones continuas por pedazos definidas en el intervalo $[0,1]$.

$$f(s) - sf'(s) > 0 \text{ para } s > 0.$$

Antes de enunciar nuestro primer teorema introducimos una definición de solución para el problema de frontera

$$-u'' = \lambda m(x)f(u) \text{ en }]0, 1[,$$

$$u(0) = u(1) = 0.$$

DEFINICIÓN 8 (0.1). Diremos que $u \in \mathcal{C}([0, 1])$ es una solución del problema

$$-u'' = \lambda m(x)f(u) \text{ en }]0, 1[$$

$$u(0) = u(1) = 0$$

si $u \in \mathcal{C}^2(]0, \alpha[\cup]\alpha, 1[)$ y verifica

$$-u'' = \lambda m(x)f(u) \text{ en }]0, 1[\setminus \{\alpha\}$$

$$u(0) = u(1) = 0$$

NOTA 17. En general, las soluciones definidas en (8) se pueden llamar soluciones del problema a “ k más dos puntos” si k son los puntos de discontinuidad de m ; en el caso particular que estamos estudiando podemos decir la solución del problema de “tres puntos”, $u(0) = u(1) = 0$ y $\lim_{t \rightarrow \alpha^-} u(t) = \lim_{t \rightarrow \alpha^+} u(t)$.

TEOREMA 25 (0.2). Sea $f'(s) > 0$ para $s \geq 0$,

- (a) Si las hipótesis [A] se verifican y $\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{f(s)}{s} = \infty$ entonces existe $\lambda^* > 0$ tal que el problema

$$-u'' = \lambda m(x)f(u) \text{ en }]0, 1[$$

$$u(0) = u(1) = 0$$

tiene al menos una solución positiva para $\lambda \in]0, \lambda^*[$

- (b) Si las hipótesis [B] se verifican y $\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{f(s)}{s} = C$ (C una constante) entonces existen constantes $0 < \underline{\lambda} < \bar{\lambda}$ tales que el problema

$$-u'' = \lambda m(x)f(u) \text{ en }]0, 1[$$

$$u(0) = u(1) = 0$$

tiene al menos una solución positiva para $\lambda \in]\underline{\lambda}, \bar{\lambda}[$

NOTA 18. Debemos observar que las soluciones obtenidas en el teorema en general no son soluciones en el sentido de las distribuciones.

32 Demostración del teorema

La prueba completa de este teorema se la puede encontrar en un trabajo anterior del autor. Brevemente, para demostrar el teorema se debe partir el problema en dos y luego se demuestra por separado que cada uno de ellos tiene solución. Efectivamente se debe probar que los problemas siguientes tienen solución.

$$\begin{cases} -u'' = \lambda f(u) & 0 < x < \alpha \\ u(0) = 0, & u(\alpha) = \rho \end{cases}$$

$$\begin{cases} -u'' = \lambda f(u) & \alpha < x < 1 \\ u(\alpha) = \rho, & u(1) = 0 \end{cases}$$

para algún $\rho > 0$.

PROPOSICIÓN 4. Si las hipótesis de la parte (a) del teorema se verifican, entonces existe $\lambda^* > 0$ tal que

$$\begin{cases} -u'' = \lambda f(u) & 0 < x < \alpha \\ u(0) = 0, & u(\alpha) = \rho \end{cases}$$

tiene al menos una solución positiva, u , para cada $\lambda \in]0, \lambda^*[$. Además la solución u verifica

$$u'(\alpha^-) = 0$$

Demostración. De la ecuación diferencial, positividad y concavidad de u en $]0, \alpha[$, se tiene que:

$$u'(x) = \sqrt{2\lambda[F(\rho) - F(u)]},$$

donde $F(u) = \int_0^u f(s)ds$ que, por integración, se obtiene:

$$\sqrt{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} \int_0^\rho \frac{ds}{\sqrt{F(\rho) - F(u)}}.$$

Definamos la función tipo "time mapping" por

$$G(\rho) = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} \int_0^\rho \frac{ds}{\sqrt{F(\rho) - F(u)}}.$$

Si se hace $u = \rho v$ en la fórmula anterior, se tiene

$$G(\rho) = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{F(\rho) - F(\rho v)}}.$$

De las hipótesis dadas sobre f , se tiene que G es decreciente, acotada y $G(\rho) \rightarrow 0$, cuando $\rho \rightarrow +\infty$.

Del análisis anterior la conclusión de la proposición es evidente. □

NOTA 19. *En este caso las soluciones son positivas. Si se quita la hipótesis $f(0) = 0$ y suponemos $f(s) < 0$, es decir el caso semipositone, el razonamiento y los resultados son iguales, pero solo si se buscan soluciones positivas. Podremos buscar en este caso soluciones que cambian signo.*

Referencias

- [1] A. Ambrosetti, *Critical Points and Nonlinear Variational Problems*, Cours de la Chaire Lagrange, Mémoire (nouvelle série) N° 49, Supplément au Bulletin de la Société Mathématique de France, **120**, (1992), 1–139.
- [2] A. Ambrosetti, M. Badiale, *The dual variational principle and elliptic problems with discontinuous nonlinearities*, J. Math. Anal. Appl., **140** (1989), 363–373.
- [3] A. Ambrosetti, M. Calahorrano, F. Dobarro, *Global branching for discontinuous problems*, Comment Math. Univ. Carolinae, **31**, (1990), 213–222.
- [4] A. Ambrosetti, V. Coti Zelati, *Periodic Solutions of Singular Lagrangian Systems*, Birkhäuser, (1993).
- [5] A. Ambrosetti, K. C. Chang, I. Ekeland, *Nonlinear Functional Analysis and applications to differential equations*, World Scientific, (1998).
- [6] A. Ambrosetti, G. F. Dell’Antonio, editors, *Variational and local methods in the study of Hamiltonian Systems*, World Scientific, (1995).
- [7] A. Ambrosetti, A. Malchiodi, *Nonlinear Analysis and Semilinear elliptic Problems*, Cambridge University Press, (2007)
- [8] A. Ambrosetti, M. Struwe, *Existence of steady vortex rings in an ideal fluid*, Arch. Rat. Mech. Anal., **108** (1989), 97–109.
- [9] A. Ambrosetti, R.E.L. Turner, *Some Discontinuous variational problems*, Diff. and Integral Equations, **1** (1988), 341–349.
- [10] A. Ambrosetti, P. Rabinowitz, J. Funct. Analysis **14**, (1973), 349–381.
- [11] D. Arcoya, M. Calahorrano, *Multivalued nonpositone problems*. Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei Mat. Appl. **9**, **1**, no. **2**, (1990), 117–123.
- [12] D. Arcoya, M. Calahorrano, *Some Discontinuous Problems with a Quasilinear Operator*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, **187**, (1994), 1059–1072.
- [13] V. Benci, P. H. Rabinowitz, *Critical point theorems for indefinite functionals*, Invent. Math., **52**, (1979), 241–273.
- [14] H. Berestycki, I. Capuzzo-Dolcetta, L. Nirenberg, *Variational methods for indefinite superlinear homogeneous elliptic problems*, NoDEA, **2**, (1995), 553–572.

- [15] H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Universitext, Springer, (2011).
- [16] M. Calahorrano, *Existencia de soluciones positivas para problemas no lineales con discontinuidades indefinidas*, Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana, **13**, (2007), 95–101.
- [17] M. Calahorrano, *Existence and multiplicity of solutions for elliptic problems with indefinite discontinuous nonlinearities*, PAMM, Proc. Appl. Math. Mech., **7**, (2007), 1040303–1040304.
- [18] M. Calahorrano, *Existence and multiplicity of solutions for elliptic problems arising in plasma physics with indefinite discontinuous nonlinearities*, FisMat, **18/1**, (2009), 1–10.
- [19] M. Calahorrano, S. González, *Existencia de soluciones débiles para un problema con parte no lineal discontinua y operador asociado de tipo p -Laplaciano*, I+D Innovación, **7**, **14**, (2004), 14–34.
- [20] M. Calahorrano, M. Yangari, *Sistemas de ecuaciones diferenciales no lineales indefinidas*, Revista Politécnica, **29**, (2010), 133–137.
- [21] M. Calahorrano, F. Dobarro, *Multiple Solutions for Inhomogeneous Elliptic Problems Arising in Astrophysics*, Math. Mod. and Methods Applied Sciences, **3**, (1993), 217–230.
- [22] M. Calahorrano, J. Mayorga, *Un problema discontinuo con operador cuasilineal*, Revista Colombiana de Matemáticas, **35**, (2001), 1–11.
- [23] M. Calahorrano, H. Mena, *Multiple solutions for Inhomogeneous Nonlinear Elliptic Problems Arising in Astrophysics*, Electronic Journal of Differential Equations, **49**, (2004), 1–10.
- [24] M. Calahorrano, H. Mena, *Remarks on Inhomogeneous Elliptic Problems arising in Astrophysics*, Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations, **19** (2005), 1–12; <http://www.math.u-szeged.hu/ejqtde/>.
- [25] D. G. De Figueiredo, *Semilinear Elliptic Systems*, School on Differential Equations, ICTP, Trieste, (2006).
- [26] D. G. de Figueiredo, J. P. Gossez, P. Ubilla, *Local superlinearity and sublinearity for indefinite semilinear elliptic problems*, Journal of Functional Analysis, **199**, 452–467, 2003.
- [27] I. Ekeland, *Convexity methods in Hamiltonian mechanics*, Springer, (1990).
- [28] M. García-Huidobro, R. Manásevich, C. Yarur, “Some results about positive solutions of a nonlinear equation with a weighted Laplacian”, Bol. Soc. Parana. Mat., **22**, 57–65, 2004.

- [29] H. Gourgeon, J. Mossino, *Sur un problème à frontière libre de la physique des plasma*, Annales de l'institut Fourier, **29**, (1979), 127–141.
- [30] H. Grand, P. N. Hu, D. C. Stevens, *Adiabatic evolution of plasma equilibrium*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., **72**, (1975), 3789–3793.
- [31] R. Manásevich, F. Zanolin, "Time-mappings and multiplicity of solutions for the one-dimensional p-Laplacian", Nonlinear Anal., **21**, 269-291, 1993.
- [32] J. Mawhin, M. Willem *Critical Point Theory and Hamiltonian Systems*, Applied Mathematical Sciences, **74**, Springer (1989).
- [33] C. Mercier, *The magnetohydrodynamic approach to the problem of plasma confinement in closed magnetic configurations*, Publications of EURATOM C.E.A., Luxembourg, 1974.
- [34] D. Papini, F. Zanolin, "A topological approach to superlinear indefinite boundary value problems", Topol. Methods Nonlinear Anal., **15**, 203-233, 2000.
- [35] D. Papini, F. Zanolin, "Differential equations with indefinite weight: boundary value problems and qualitative properties of the solutions", Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino, **60**, 265-296, 2002.
- [36] D. Papini, F. Zanolin, "Periodic points and chaotic-like dynamics of planar maps associated to nonlinear Hill's equations with indefinite weight", Georgian Mathematical Journal, **9**, 339-366, 2002.
- [37] I. Peral Alonso, *Métodos Variacionales y Ecuaciones en derivadas Parciales*, Universidad de Almería, notas de un curso, 1998; [http : // www.uam.es / personal_pdi / ciencias / ireneo / ALMERIA1.pdf](http://www.uam.es/personal_pdi/ciencias/ireneo/ALMERIA1.pdf)
- [38] P.H. Rabinowitz, *Minimax Methods in Critical Point Theory with Applications to Differential Equations*, **CBMS 65**, American Mathematical Society, 1986.
- [39] G. Stampacchia, *Le problème de Dirichlet pour les équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus*. Annales de l'institut Fourier, **15** no. 1 (1965), 189–257
- [40] M. Struwe, *Variational Methods (Applications to Nonlinear Partial Differential Equations and Hamiltonian Systems)*, Springer-Verlag, (1990).
- [41] C. Stuart, J. F. Toland, *A variational method for boundary value problems with discontinuous non-linearities*, J. London Math. Soc., **21**, (1980), 319–328.
- [42] R. Temam, *Variational principles related to the equilibrium shape of a confined plasma in an axisymmetric torus*, Plasma Physics, **17**, (1975), 707–711.
- [43] R. Temam, *A nonlinear Eigenvalue problem : the shape at equilibrium of a confined plasma*, Arch. Rational Mech. Anal., **60**, (1975), 51–73.

Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje y en la enseñanza de la Matemática

Juan Carlos Trujillo O*

Julio 2014

Resumen

El error que las y los estudiantes cometen en sus procesos de aprendizaje de la Matemática es una de las fuentes más valiosas para identificar las dificultades y los obstáculos presentes en estos procesos. El objetivo general de este curso breve es presentar un marco teórico para el estudio, precisamente, de las dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de la Matemática. Un marco referencial adecuado permitirá a las y los docentes diseñar, construir y aplicar herramientas para la identificación de las dificultades y obstáculos en los procesos de aprendizaje y, a partir de los resultados obtenidos, desarrollar metodologías y didácticas para el mejoramiento de la enseñanza y el aprendizaje.

1 Introducción

Entre diversas corrientes y tendencias, en este curso se mostrará la propuesta de Martín Socas (Socas 1997) y se esbozará la aplicación a la enseñanza de la Trigonometría en el Bachillerato; en particular, se abordarán dos problemas importantes:

1. extender la noción de razón trigonométrica de ángulos de un triángulo rectángulo a un ángulo en un sistema de coordenadas; y
2. pasar de las razones trigonométricas de ángulos a las funciones trigonométricas cuyos dominios son conjuntos de números reales.

Este documento ha sido dividido en dos partes. En la primera, se presentará una síntesis de la propuesta realizada por Martín Socas en el capítulo 5 del libro "La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria", titulado "Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria" en el año 1997. Salvo que se diga lo contrario, todo lo contenido en esta parte está tomado del texto mencionado.

La segunda parte contiene la organización de los contenidos trigonométricos que se estudian en el bachillerato, en general, en el latinoamericano, en particular, en el ecuatoriano. Como propuesta futura, la intención es diseñar ambientes de enseñanza

*Departamento de Matemática de la Escuela Politécnica Nacional

y aprendizaje de la Trigonometría idóneos que prevean, en la medida de lo posible¹, las dificultades, los obstáculos y errores más frecuentes.

Uno de los problemas centrales en la transición del colegio a la universidad es el despojar a las razones trigonométricas de su relación exclusiva con los ángulos, con el fin de poder mirarlas como funciones cuyo dominio es el conjunto de los números reales. En este problema está inmerso otro, de mayor envergadura: el concepto de función, sin el cual es muy difícil que las y los estudiantes puedan apropiarse de la matemática, tanto a nivel de la secundaria como, y principalmente ahí, de la matemática universitaria.

Finalmente, la primera parte de este documento no pretende de modo alguno evitar la lectura del texto original; más bien, todo lo contrario, invita a las y los participantes a su lectura como inicio para abordar de manera seria el problema del aprendizaje y de la enseñanza de las matemáticas a la luz de las dificultades, obstáculos y errores.

2 Dificultades, obstáculos y errores

Al igual que la mayoría de las y los educadores en la actualidad, Socas plantea que, lejos de considerar a los errores que las y los estudiantes cometen, tanto en el desarrollo de las clases como en las tareas y, principalmente, en sus evaluaciones, como faltas de conocimiento, “despiste”, vagancia, etcétera, supone “la presencia en el alumno de un esquema cognitivo inadecuado” (Socas, p. 125). El error visto así es, más bien, un síntoma que nos tiene que conducir al diagnóstico del o los problemas que lo provocan, con el objetivo de diseñar las herramientas para su resolución.

Estos errores son provocados fundamentalmente por la presencia de dificultades y obstáculos en el proceso de aprendizaje fundamentalmente. El trabajo de Socas propone un análisis del “origen de estas dificultades, la noción de obstáculo y los diferentes errores que cometen los alumnos al trabajar con las matemáticas; también comentaremos las razones por las que se origina”.

Si bien numerosas investigaciones en educación matemática se centran casi exclusivamente en el **microsistema educativo**:

1. estudiante,
2. matemática y
3. docente,

hay también una corriente importante que amplía la investigación al denominado **macrosistema educativo**, que consiste de, a más del microsistema, de:

1. la institución escolar,
2. el contexto social en el que la institución y las y los estudiantes se encuentran,
y

¹Hay dificultades, obstáculos y errores que son inevitables, que están en el mismo corazón de la matemática y de sus posibilidades de ser enseñada y aprendida. Sin embargo, esta característica misma puede ser aprovechada para su superación.

3. el contexto global.

Una verdadero enfoque de todo el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática, y las correspondientes propuestas, metodologías, en fin, ambientes de aprendizaje, deberían estudiarse y aplicarse dentro de este marco. Sin embargo, la complejidad de este enfoque hace que abordemos la investigación por etapas y tramos. En particular, Socas plantea que tomando en cuenta, a más del microsistema, la institución escolar, las dificultades se puedan abordar desde la siguientes perspectivas:

1. desarrollo cognitivo de las y los alumnos,
2. currículo de matemáticas y
3. métodos de enseñanza.

2.1 Dificultades

Socas propone que las dificultades pueden organizarse en las siguientes categorías, según se asocian a:

1. la complejidad de los objetos matemáticos,
2. los procesos de pensamiento matemático,
3. los procesos de enseñanza desarrollados para el aprendizaje de las matemáticas,
4. los procesos de desarrollo cognitivo de los alumnos, y
5. las actitudes afectivas y emocionales hacia la matemática.

2.1.1 Dificultades asociadas a la complejidad de los objetos de las matemáticas

La comunicación de los objetos matemáticos a través del lenguaje es una de las fuentes principales de las dificultades. En este proceso se presentan diversos conflictos; uno de ellos es denominado por Socas como **conflicto de precisión**: “entre el lenguaje ordinario que puede comunicar el significado por alusión o asociación, y el lenguaje matemático que comunica el significado por la interpretación exacta que se da a los signos”.

En este sentido, el papel del lenguaje castellano, en nuestro caso, es crucial. En los procesos de enseñanza y aprendizaje, debe enfatizarse en la interrelación que debe existir entre el aprendizaje de las matemáticas y el aprendizaje del lenguaje, en el hecho de que en las matemáticas se van a utilizar palabras del lenguaje coloquial que adquirirán significados diferentes, a veces, incluso, opuestos o lejanos a la realidad cotidiana.

Por otro lado, la complejidad de los objetos matemáticos se manifiesta a través de la **naturaleza abstracta de la matemática**, que no puede ser evitada, y que se lleva a cabo a través de un proceso que puede ser dividido en tres etapas o estadios

de desarrollo de los sistemas de representación cognitivos: **semiótico, estructural y autónomo**.

En palabras breves de Socas:

1. En el estadio semiótico, “los alumnos aprenden signos nuevos que adquieren significado con los signos antiguos ya conocidos”.
2. En el estadio estructural, “el sistema antiguo organiza la estructura del sistema nuevo”.
3. En el estadio autónomo, “estos signos actúan con significados propios, independientemente del sistema anterior”.

El tránsito del estadio semiótico hasta el estado autónomo es “el proceso de generalización de las matemáticas y es una característica de la misma, como parte inherente del desarrollo de sus signos”. Por otro lado, “el sistema nuevo es una fuente de dificultades al encontrarnos con elementos que no pueden ser reconocidos en términos del sistema de signos antiguo”.

La matemática opera en dos niveles: el **semántico** y el **sintáctico**, lo que se refleja a través del análisis de la abstracción matemática por medio de sus sistemas de representación; esto implica que los objetos matemáticos siempre tienen dos estados diferentes: **conceptual** y **operacional**, respectivamente. El enfatizar esta doble naturaleza en el proceso de enseñanza aprendizaje, sea de manera explícita o a través de metodologías de trabajo en el aula, en la casa, etcétera, es un primer paso hacia la superación de las dificultades originadas por la naturaleza de la matemática.

2.1.2 Dificultades asociadas a los procesos de pensamiento matemático

“Siempre se ha considerado como una de las principales dificultades en el aprendizaje de las matemáticas, el aspecto deductivo formal”. Que se omitan algunas o casi todas las demostraciones en los procesos de enseñanza y aprendizaje en la escuela y en el colegio, en beneficio de aprender los aspectos operativos de los objetos matemáticos, no debe implicar, en modo alguno, el renunciar a trabajar en el desarrollo del pensamiento matemático, pues la capacidad de seguir un argumento lógico, o de realizarlo, “genera mayor dificultad en el aprendizaje de esta ciencia”.

Dice Socas que “el fomentar esta capacidad para seguir un argumento lógico no se debe contraponer a los métodos intuitivos, a las conjeturas, a los ejemplos y contraejemplos, que también permiten obtener resultados y métodos correctos, sino que, más bien, esta capacidad se desarrolla con la práctica de estos métodos informales; sin embargo, sí estaría en contra de la intención ingenua de los métodos rutinarios, de las conjeturas aleatorias, etcétera”.

Por otro lado, hay claras dificultades generadas de que la lógica se muestra en tres dimensiones:

1. El carácter deductivo inevitable en la matemática.
2. La lógica social y el contexto.

3. La lógica escolar reflejada a través de que “lleva (la lógica) al alumno a responder, no a la pregunta que realizamos en el problema sino a una metapregunta: ¿qué espera el profesor que yo haga?”.

Por otro lado, el propio desarrollo de las matemáticas crea rupturas en el modo de pensamiento matemático, que son dificultades inevitables como el hecho de que el modelo aditivo “crea dificultades al modelo multiplicativo y lineal y éste, crea dificultades a otros modelos”.

2.1.3 Dificultades por los procesos de enseñanza aprendizaje

En palabras de Socas

Las dificultades asociadas a los procesos de enseñanza tienen que ver con la institución escolar, con el currículo de matemáticas y con los métodos de enseñanza.

Estas dificultades son, quizás, más complejas, incluso, que las dos anteriores, pues escapan a patrones de comportamiento. En todo caso, la institución escolar debería trabajar por disminuir las dificultades en el aprendizaje, aunque, muchas veces, únicamente las incrementa.

Para Socas, con respecto a la **organización curricular**, “cuatro serían los elementos básicos a considerar como dificultades en el currículo de matemáticas:

1. las **habilidades necesarias** para desarrollar capacidades matemáticas que definan la competencia de un alumno en matemáticas,
2. la necesidad de **contenidos anteriores**,
3. el **nivel de abstracción** requerido, y
4. la **naturaleza lógica** de las matemáticas escolares.”

Con respecto a los métodos de enseñanza, los aspectos a considerar que Socas plantea son los siguientes:

1. “El **lenguaje**, que debe adaptarse a las capacidades y comprensión de los alumnos;
2. la **secuenciación de las unidades** de aprendizaje que debe estar **adaptada a la lógica interna** de las matemáticas;
3. el **respeto a las individualidades** que tiene que ver con los ritmos de trabajo en clase;
4. los **recursos** y la presentación adecuada”.

2.1.4 Dificultades por el desarrollo cognitivo de los alumnos

Para Socas “la posibilidad de tener información sobre la naturaleza de los procesos de aprendizaje y conocimientos del desarrollo intelectual, permite conocer el nivel de dificultades, realizaciones y respuestas a cuestiones esperadas de los alumnos”.

Hay varios enfoques que pueden considerarse; entre ellos estarían:

1. Jerárquico del aprendizaje.
2. Evolutivo.
3. Estructuralista.
4. Constructivista.
5. Procesamiento de la información.

En este curso no abordaremos esta categoría de dificultades.

2.1.5 Dificultades por las actitudes afectivas y emocionales

Aunque a las y los docentes no nos guste mucho esta idea, Socas la enuncia:

Sabemos que a muchos estudiantes, incluyendo a algunos de los más capacitados, no les gustan las matemáticas. Muchos alumnos tienen sentimientos de tensión y miedo hacia ella.

¿Qué aspectos podrían influir en la aversión a las matemáticas? Tal vez, los siguientes:

1. la naturaleza jerárquica de la matemática,
2. la naturaleza abstracta de la matemática,
3. la actitud de las y los docentes hacia las y los estudiantes, estilos de enseñanza,
4. actitudes y creencias hacia las matemáticas que les son transmitidas.

También hay varias creencias que son transmitidas por madres y padres, por las y los docentes, sobre qué son las matemáticas:

1. fijas, inmutables, externas, intratables, irreales;
2. abstractas y no relacionadas con la realidad;
3. un misterio accesible a pocos;
4. una colección de reglas y hechos que deben ser recordados;
5. un área en la que se harán juicios, no sólo sobre el intelecto, sino sobre la valía personal.

2.2 Obstáculos

1. Brousseau considera que los obstáculos que se presentan en el sistema didáctico pueden ser de origen **ontogénico** o **psicogénico, didáctico y epistemológico**.
2. Tall “no hace distinciones entre los obstáculos. Los llama simplemente obstáculos cognitivos, y distingue dos tipos”: los basados en la **secuencia de un tema** y los basados sobre **casos simples**.
3. Tanto Bachelard como Brousseau caracterizan un obstáculo como: “aquel conocimiento que ha sido en general satisfactorio durante un tiempo para la resolución de ciertos problemas, y que por esta razón se fija en la mente de los estudiantes, pero que posteriormente este conocimiento resulta inadecuado y difícil de adaptarse cuando el alumno se enfrenta con nuevos problemas”.
4. Un **obstáculo** es un conocimiento adquirido, no una falta de conocimiento. No se trata de una falta de conocimiento, sino de algo que se conoce positivamente, o sea, está constituyendo un conocimiento.

En este curso utilizaremos, fundamentalmente, este último enunciado para tratar la noción de obstáculo.

2.3 Errores en Matemáticas

Explicar el desarrollo de ciertos conceptos y el nacimiento de nuevas teorías es posible, tal vez, gracias al análisis crítico de las concepciones vigentes. Tanto de la época analizada como de la época en la que se analiza, aunque las concepciones de la época desde la que se analiza son menos “visibles”, porque estamos inmersa en ellos, lo que casi siempre nos hace ser menos críticos.

Haciendo un paralelismo con la noción de “concepciones limitadas” de Lakatos, Socas propone que el análisis de algunos de los errores que cometen las y los estudiantes —no para todos los errores—, podrían abordarse desde una posición similar al afirmar que “puede ser válido también en el caso de los errores cometidos por los estudiantes, puesto que muchos de éstos pueden explicarse a través de los métodos que ellos desarrollan con el tiempo, siendo dichos métodos válidos en algunos casos solamente”.

2.3.1 Procedimientos erróneos

Socas presenta cinco ejemplos de errores. En los tres primeros se analiza la posibilidad de utilizarlos en el aprendizaje al pedir a las alumnas y a los alumnos que busquen bajo qué condiciones sus afirmaciones no serían erróneas.

1. *Suma de fracciones:* $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$.

2. *El cuadrado de un binomio:* $(a+b)^2 = a^2 + b^2$.

3. Los ejemplos 3 y 4 tienen que ver con la “cancelación”; en ambos, el problema yace en el significado a la “yuxtaposición” de los signos, que en algunos casos se interpretan explícitamente como producto, pero en otros, como sumas (aunque no de manera explícita, como ocurre en la notación posicional de los números).
4. Un ejemplo aparente de dos errores da como resultado un acierto. Sin embargo, no estoy de acuerdo con Socas, pues las y los estudiantes, en cada ocasión en que derivan, cometen uno de los dos errores únicamente, no los dos, de manera que ellas y ellos no podrían visibilizar el error.

2.3.2 Las pseudo-demostraciones

Socas presenta tres ejemplos.

1. En el primero, el error se comete cuando al “extraer” la raíz cuadrada de cada uno de los lados de la igualdad, se utiliza la fórmula $\sqrt{x^2} = x$, que es incorrecta, en lugar de la fórmula $\sqrt{x^2} = |x|$, que es correcta.
2. En el segundo, el error se comete al dividir, ambos lados de una igualdad, por 0, encubierto en $x - 1$ cuando $x = 1$.
3. En el tercer ejemplo, el error está en afirmar que la intersección de la bisectriz de uno de los ángulos internos del triángulo y la mediatriz de uno de los lados adyacentes al ángulo correspondiente está en el interior del triángulo, cuando esto no es así en todos los triángulos.
4. Sobre estos ejemplos, Socas dice: “El aprovechamiento de los casos anteriores en el contexto escolar puede realizarse atendiendo a la serie de propiedades ocultas que generan estos errores y permiten ampliar la comprensión de algunos contenidos matemáticos”.
5. Otro ejemplo, aunque ahí Socas no explicita el uso o significado del signo \sqrt{a} . Si es visto como una función, es decir, es aquel número positivo cuyo cuadrado es a , su ejemplo no es válido, porque esa función sí es inyectiva. En esta situación, es verdadera la igualdad $\sqrt{x^2} = |x|$. En cambio, si se lo ve únicamente como un número b (no único necesariamente) cuyo cuadrado es a , sucede que también $-b$ cumple con esa condición y, en ese caso, la igualdad que es verdad es $\sqrt{x^2} = x$, y, entonces, la proposición $a = b$ no implica la proposición $\sqrt{a} = \sqrt{b}$.
6. Socas sintetiza el valor didáctico de estos errores en: “consiste en plantear el propio error como un problema matemático”.

2.4 Errores en el aprendizaje de las matemáticas: evaluación y diagnóstico

Socas insiste en que las y los docentes deben tener conocimiento de los errores de los estudiantes porque le proveerán “información sobre la forma en que los alumnos

interpretan los problemas y utilizan los diferentes procedimientos para alcanzar una buena meta”.

Plantea las siguientes como causas principales de los errores en el aprendizaje de las matemáticas:

1. Errores que tienen su origen en un **obstáculo**.
2. Errores que tienen su origen en una **ausencia de sentido**.
3. Errores que tienen su origen en **actitudes afectivas y emocionales**.

Para esta clasificación de los errores, Socas se apoya en la **posición cognitiva** de la psicología educativa que sostiene, entre otros, los siguientes principios:

1. “... la mente del alumno no es una página en blanco. El alumno tiene un conocimiento anterior que parece suficiente y establece en la mente del alumno un cierto equilibrio”.
2. “El nuevo conocimiento debe tener significado para el alumno y para ello debe [...] por lo menos recuperar algunas representaciones que ya estaban en su mente ...” (Origen del error: en una ausencia de sentido).
3. “... el saber anterior produce modelos implícitos que a veces son favorables con el nuevo conocimiento matemático y que, por tanto, hay que explicitarlo, y otras veces, al contrario, son un obstáculo”. (Origen del error: en un obstáculo).
4. “En ningún caso el conocimiento nuevo se añade al saber antiguo, muy al contrario se construye luchando contra él, porque debe provocar una estructuración nueva del conocimiento total”.

2.4.1 Errores que tienen su origen en un obstáculo

Socas cita tres ejemplos:

1. La **no aceptación de la clausura** de Collis (1974) en situaciones como $x + 7$ o $3x$.
2. El **dilema proceso-producto** de Davis (1975) en el que la expresión algebraica $x + 7$ expresa, al mismo tiempo, la operación de sumar y el resultado de la suma.
3. La **concatenación** o **yuxtaposición** representa, en unos casos, multiplicación (en el álgebra), en otros, adición (en la aritmética).

2.4.2 Errores que tienen su origen en ausencia de sentido

Estos se originan en los diferentes estadios de representación. Socas analiza para el caso de los errores en el aprendizaje del Álgebra.

1. **Errores del Álgebra que tienen su origen en la Aritmética (estadio semiótico).** Los errores cometidos son errores no corregidos dentro de la Aritmética. Socas presenta una variedad de ejemplos con la suma de fracciones, la distributiva con (-1) —se aplica únicamente al primer término—, y la diferencia que hay entre las propiedades de la suma con las de la multiplicación.
2. **Errores de procedimiento (estadio estructural).** En los diversos ejemplos presentados, los el error podría evitarse si “el alumno hubiese modificado la situación para que encajase con la regla, en vez de extender la regla para abarcar la situación”. Aquí hay que advertir que la modificación de la situación tiene que hacer mediante reglas válidas; es decir, ni añadir ni quitar las hipótesis iniciales del problema. Los ejemplos de Socas versan sobre:
 - (a) Extensión de la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma al caso de la multiplicación respecto de la multiplicación.
 - (b) La “propiedad distributiva” de los exponentes respecto del producto de las bases genera errores cuando la base es la suma de dos números. Se presentan otras variantes.
 - (c) Errores en el uso de los recíprocos.
 - (d) Errores de cancelación.
3. **Errores del Álgebra debidos a las características propias del lenguaje algebraico (estadio autónomo).** Socas presenta dos ejemplos de errores: el uso del signo “=” y la sustitución formal.
 - (a) Para el primer caso, el signo “=” tiene un significado en una ecuación diferente al que tiene en una identidad algebraica.
 - (b) En el segundo ejemplo, refiere tanto al proceso generalización como el de sustitución propiamente.
 - (c) Al respecto de la sustitución formal, Socas dice: “...es un instrumento de cálculo algebraico importante a causa de su amplio campo de aplicaciones, que se manifiesta en diferentes procesos matemáticos, tales como generalización, simplificación, eliminación, complicación estructural y particularización”.

Para Socas, el proceso de enseñanza tiene que tener tres fases (y no dos): **evaluación y diagnóstico, contenidos y aplicaciones**, siendo la primera la más importante, “en la cual la explicitación de los errores se tiene que hacer”.

Finalmente, la “evaluación diagnóstica es un conjunto de situaciones de aprendizaje diseñadas para identificar las dificultades específicas del aprendizaje, que tratan de determinar la naturaleza de las mismas. [...] El objeto de la evaluación diagnóstica es claro: determinar inmediatamente una acción conveniente de remedio”.

2.5 Estrategias de prevención y remedios

En este caso, el análisis de las dificultades “supone combinar estrategias generales y específicas a largo plazo con estrategias particulares e inmediatas”. Se analizan por

separado las estrategias de prevención y de remedios.

La **prevención** debe orientarse por las dificultades (según la clasificación dada), por los obstáculos y por los errores, y las estrategias correspondientes deben:

1. Evitar o minimizar los obstáculos.
2. Dotar de sentido a los objetos y al pensamiento matemáticos.
3. Crear un clima de actitudes afectivas y emocionales positivas hacia las matemáticas.

Socas propone como **estrategias generales de prevención** las siguientes:

1. Introducir los conceptos y procesos matemáticos respetando las etapas de desarrollo que se dan en los sistemas de representación cognitiva.
2. Asegurarse de que los objetos matemáticos del sistema antiguo de signos no presente dificultades.
3. No precipitar el aprendizaje del nuevo objeto.
4. Evitar una innecesaria complejidad de los signos matemáticos.
5. Asegurarse de que los diferentes sentidos de un objeto matemático están claramente diferenciados.

“Los **remedios** tienen que ver más con el día a día, con la interacción diaria en clase entre el profesor y el alumno. Su eficacia viene determinada, en gran medida, por una buena evaluación y diagnóstico”. Para el éxito de las estrategias correspondientes, el posicionamiento de la profesora o profesor es fundamental. Socas analiza este posicionamiento según dos paradigmas: el **conductual**, influenciado por la teoría de la absorción y el **cognitivo**. Una vez “aceptado el origen del error, las estrategias de remedio van dirigidas a:

1. Superar un obstáculo.
2. Dar sentido a los objetos matemáticos.
3. Crear una actitud racional hacia las matemáticas”.

Para la **superación de obstáculos**, Socas cita a Brousseau (1983): “La superación de un obstáculo requiere un esfuerzo de la misma naturaleza que cuando se establece un conocimiento...” y añade que Bachelard señala que “es en la superación de ese obstáculo donde vamos a conseguir el conocimiento nuevo”.

Para la **superación de la falta de sentido** en los objetos matemáticos: Socas propone que se debería colocar a las y los estudiantes en una situación de conflicto “que genere esquemas que doten de sentido al concepto o proceso erróneo”. El ejemplo que Socas presenta es utilizar el método del contraejemplo, aunque señala que generalmente no es suficiente, por lo que deberían buscarse otras alternativas, como utilizar diferentes sistemas de representación cognitiva.

Finalmente, Socas analiza, muy brevemente y sin profundidad, los orígenes de los errores por falta de una actitud racional hacia las matemáticas. En los siguientes módulos, abordaremos esta temática, así como las que corresponden a la institución y al contexto.

3 Caso: la Trigonometría de la secundaria

Como se indicó en la introducción, uno de los principales problemas en la enseñanza y en el aprendizaje de la Trigonometría es poder pasar en ambas direcciones de las razones trigonométricas (asociadas con ángulos y triángulos) y las funciones trigonométricas (más generales, asociadas con números).

Con el ejercicio que se muestra a continuación, se plantea un esbozo encaminado a alcanzar tres objetivos:

1. Comprender los conceptos de los estadios de desarrollo en los sistemas de representación cognitivo.
2. Identificar puntos críticos en el aprendizaje de la Trigonometría, con miras al análisis de los errores y dificultades.
3. Elaborar la base de contenidos que permitan abordar el diseño de herramientas para la detección y superación de dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje y en la enseñanza de la Trigonometría. Plan ambicioso, ¿verdad?

Con este propósito, vamos a identificar los contenidos trigonométricos y no trigonométricos que deberían ser trabajados en cada uno de los estadios. Pero antes, precisemos un poco cuál es el sistema antiguo y cuál el nuevo.

3.1 Sistema antiguo

Consiste de las razones trigonométricas de ángulos en un triángulo rectángulo. Aparte de las definiciones, en este sistema se desarrollan los siguientes temas:

1. *La relación entre las diferentes razones trigonométricas obtenidas de la definición directamente.* Por ejemplo:

$$\tan \angle A = \frac{\text{sen } \angle A}{\text{cos } \angle A}.$$

2. *La relación entre las razones trigonométricas entre dos ángulos complementarios.* Por ejemplo, si $\angle A$ y $\angle B$ son los ángulos agudos de un triángulo rectángulo, entonces

$$\text{sen } \angle A = \text{cos } \angle B,$$

que, por un abuso de notación, se traduce en

$$\text{sen}(90^\circ - \angle B) = \text{cos } \angle B.$$

3. *Las identidades pitagóricas.* Las que se obtienen directamente de las definiciones y del teorema de Pitágoras. Por ejemplo:

$$\text{sen}^2 \angle A + \text{cos}^2 \angle A = 1.$$

4. *Las razones trigonométricas de los ángulos de 30° , 45° y 60° .*

3.2 Sistema nuevo

Consiste en las funciones trigonométricas de números reales. Es decir, mientras en el sistema antiguo decimos “el seno del ángulo $\angle A$ ”, donde $\angle A$ es uno de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo, en el sistema nuevo decimos “el seno de x ”, donde x es cualquier número real.

En el sistema nuevo se definen y estudian las funciones trigonométricas desde la perspectiva del concepto de función. Esto significa trabajar, entre otros aspectos, con los siguientes.

1. *Las funciones trigonométricas son funciones cuyo dominio y conjunto de salida son subconjuntos de los números reales.* Por ejemplo: $\text{sen}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $\text{tan}: \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\} \rightarrow \mathbb{R}$.

$$\mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\} \rightarrow \mathbb{R}.$$

2. *La monotonía.* Por ejemplo, la función sen es creciente en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, la función cos es decreciente en el intervalo $[0, \pi]$.
3. *La paridad.* Por ejemplo, la función sen es impar, pues $\text{sen}(-x) = -\text{sen } x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, en cambio, la función cos es par, ya que $\text{cos}(-x) = \text{cos } x$.
4. *Los extremos.* Por ejemplo, el valor mayor que toma la función sen es 1 y lo hace en todos los números de la forma $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, donde $k \in \mathbb{Z}$.
5. *La periodicidad.* Por ejemplo, la función sen es periódica y su período es 2π ; la función tan también es periódica, pero su período es π .
6. *Funciones inversas.* Por ejemplo, la función sen , al ser periódica, no es inyectiva; por lo tanto, no es inversible. Sin embargo, si restringimos esta función al intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, obtenemos una función biyectiva. La correspondiente función inversa es denominada la función inversa de sen y suele ser representada con arc sen , aunque, frecuentemente también por sen^{-1} . Esta última notación es fuente de errores frecuentes.

3.3 Los tres estadios

En el estado **semiótico**, tendremos que establecer también, aparte de las definiciones, los prerrequisitos geométricos, aritméticos y algebraicos para dichas definiciones, y las propiedades de las razones trigonométricas para esos ángulos.

Como ya se dijo, sobre la base del sistema antiguo, se construye el sistema nuevo. Para ello, se deberán introducir los conceptos del sistema nuevo a partir de los dados en el sistema viejo. En este caso, se extiende la noción de ángulo, con lo que aparecerán, entre otras, las nociones de *radián* y *periodicidad*. En esta fase se empieza a estructurar el sistema nuevo; es decir, nos encontramos en el estadio **estructural**.

Finalmente, deberá establecerse el sistema nuevo de manera independiente del antiguo. Con este propósito, como ya se ha vislumbrado, habrá que recurrir a las nociones de funciones e introducir, con base a lo trabajado en el estadio **estructural**, las definiciones de las funciones trigonométricas para cualquier número real. Este será el estadio **autónomo**.

4 En el estadio semiótico

Vamos a clasificar los contenidos de este estadio en dos categorías: **geométricos** y **trigonométricos**.

4.1 Geométricos

Los conceptos y las propiedades que están establecidos en este estadio son los siguientes².

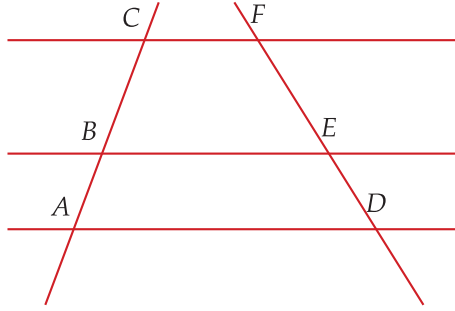
1. *Sobre triángulos:*

- (a) *Criterio de congruencia de triángulos LLL:* si los lados de un triángulo son congruentes con los tres lados de otro triángulo, respectivamente, entonces los tres ángulos del primer triángulo son congruentes con los tres ángulos del otro, respectivamente.
- (b) En todo triángulo isósceles, los ángulos opuestos a los lados congruentes son también congruentes entre sí.
- (c) La suma de las medidas de los ángulo en cualquier triángulo es igual a 180° .
- (d) De las tres proposiciones anteriores, se pueden deducir fácilmente las siguientes proposiciones:
 - i. Los ángulos de un triángulo equilátero son congruentes entre sí y miden, cada uno, 60° .
 - ii. Con respecto a cada uno de los vértices de un triángulo equilátero, la bisectriz, la mediana, la altura y la mediatriz son la misma recta.

Con ayuda de estas dos proposiciones y del teorema de Pitágoras, se podrán calcular las razones trigonométricas de los ángulos de 30 y 60 grados.

- 2. *Ángulos de un triángulo rectángulo.* Dado que en todo triángulo la suma de las medidas de los tres ángulos es igual a 180° , y la medida de un ángulo recto es igual a 90° , los otros dos ángulos de un triángulo rectángulo son *agudos* y *complementarios*.
- 3. *Teorema de Pitágoras.* En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos.
- 4. *Teorema de proporcionalidad de Tales.* Tres rectas paralelas cortadas por dos rectas transversalmente determinan, en las transversales, segmentos proporcionales. De manera más precisa, y en referencia al gráfico siguiente

²El orden de presentación de estas propiedades y conceptos no responden, necesariamente, al orden en que se suelen presentar o deberían ser trabajadas en el aula.



se verifica la igualdad:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}.$$

4.2 Trigonómicos

En este estadio deben estar definidas las seis razones trigonométricas y obtenerse sus principales propiedades. Un orden puede ser el siguiente.

1. *Constancia entre los lados de un triángulo rectángulo.* Para definir las razones trigonométricas, es necesario establecer que el cociente entre las longitudes de los tres lados de un triángulo rectángulo dependen, únicamente de los ángulos.

A modo de ejemplo, consideremos dos triángulos rectángulos $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$, con $\angle C$ y $\angle C'$ los ángulos rectos, respectivamente, y tales que los ángulos $\angle A$ y $\angle B$ son congruentes con los ángulos $\angle A'$ y $\angle B'$, respectivamente. En otras palabras, los dos triángulos son *semejantes*.

Al aplicar el teorema de proporcionalidad de Tales, se demuestra, entre otras, la siguiente igualdad:

$$\frac{AC}{AB} = \frac{A'C'}{A'B'}.$$

2. *Razones trigonométricas de un ángulo en un triángulo rectángulo.* Por la propiedad anterior, independientemente en qué triángulo rectángulo "esté un ángulo agudo", el cociente entre la longitud del cateto opuesto al ángulo y la longitud de la hipotenusa del triángulo siempre es la misma. A este número, que solo dependen del ángulo y no del triángulo, denominamos *seno del ángulo*.

Con la notación del ítem anterior, si nombramos con a , b y c las longitudes de los lados del triángulo $\triangle ABC$ que se oponen a los vértices A , B y C , respectivamente, tenemos que

$$a = BC, \quad b = AC \quad \text{y} \quad c = AB,$$

y se definen las razones:

$$\text{sen } \angle A = \frac{a}{c}, \quad \tan \angle A = \frac{a}{b} \quad \text{y} \quad \sec \angle A = \frac{c}{b}$$

y las “co-razones”, como las razones del ángulo complementario

$$\cos \angle A = \frac{b}{c}, \quad \cot \angle A = \frac{b}{a} \quad \text{y} \quad \csc \angle A = \frac{a}{c},$$

pues los ángulos $\angle A$ y $\angle B$ son complementarios y las razones del primero son las co-razones del segundo, y viceversa. Se obtienen, entre otras, las identidades:

$$\sin(90^\circ - A) = \cos B, \quad \cos(90^\circ - A) = \sin B.$$

También se obtienen identidades básicas como las siguientes:

$$\tan \angle A = \frac{\sin \angle A}{\cos \angle A} \quad \text{y} \quad \sec \angle A = \frac{1}{\cos \angle A}.$$

3. *Identidades pitagóricas.* Con las notaciones de los ítemes anteriores, el teorema de Pitágoras asegura que la igualdad siguiente es verdadera:

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Entonces, a través de la manipulación algebraica y aritmética de esta igualdad, obtenemos, entre otras, las siguientes:

$$1 = \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 \quad \text{y} \quad \left(\frac{c}{b}\right)^2 = \left(\frac{a}{b}\right)^2 + 1,$$

que se transforman en

$$1 = \sin^2 \angle A + \cos^2 \angle A \quad \text{y} \quad \sec^2 \angle A = \tan^2 \angle A + 1,$$

respectivamente.

4. *Las razones trigonométricas de los ángulos de 30° , 45° y 60° .* Para el cálculo de las razones de 30° y 60° se utiliza un triángulo equilátero (sin importar cuál es la longitud de cada uno de sus lados), gracias al teorema de la proporcionalidad de Tales. También se utiliza el hecho de que en un triángulo equilátero la mediana, bisectriz y altura coinciden entre sí para un vértice dado. La longitud de cualquiera de estos segmentos —que son, en realidad, uno solo— es calculada a través del teorema de Pitágoras.

5 En el estadio estructural

5.1 Introducción del sistema nuevo

No todos los triángulos en los que se pueden aplicar las razones trigonométricas son rectángulos; esto quiere decir que no todos los ángulos son agudos. A pesar de esto, es posible aplicar las razones trigonométricas sin ningún cambio en algunos casos,

tan solo con considerar la altura de uno de los vértices. Sin embargo, en otros esto ya no es posible.

Para establecer una estructura para el sistema nuevo, se extiende o generaliza, en primer lugar, la noción de un ángulo. Mientras que en el sistema antiguo, es suficiente con tener un ángulo *estático*, definido como la unión de dos rayos, ahora se va introducir un ángulo *dinámico*, en el que se pueden considerar ángulos de cualquier magnitud, más allá de 360 grados, y también ángulos negativos.

Los contenidos del sistema nuevo en este estadio pueden organizarse de la manera siguiente:

1. *Un sistema de coordenadas*. Si ya es conocido por las y los estudiantes, estos contenidos son un prerrequisito.
2. *Ángulo trigonométrico o dinámico*.
3. *Las razones trigonométricas de un ángulo trigonométrico*.
4. *Ley de senos y cosenos*. Las demostraciones de estas dos leyes son sencillas. El único problema para trabajar con ellas en el estadio anterior es el hecho de no poder decir a qué es igual el seno y el coseno de un ángulo obtuso.
5. *Propiedades que generalizan propiedades de las razones trigonométricas de ángulos en un triángulo rectángulo*.
6. *Periodicidad*.
7. *Funciones trigonométricas de "operaciones" entre ángulos*.
8. *Identidades trigonométricas*.

5.2 Ángulo trigonométrico

Un ángulo *trigonométrico* es también la unión de dos rayos que tienen un mismo origen; pero ahora ya no hay la restricción de que estos rayos sean no colineales. Veamos cómo se puede definir.

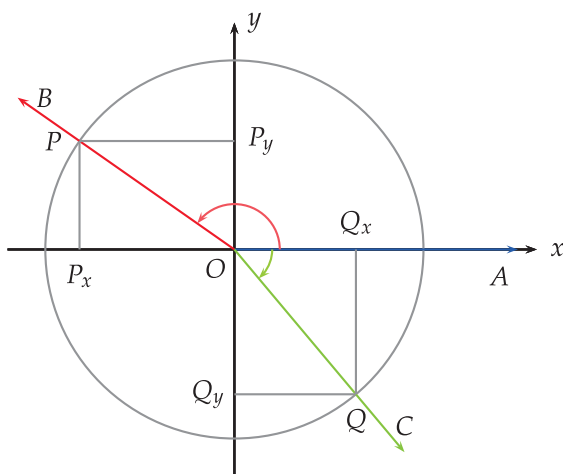
En un sistema de coordenadas, se considera un rayo que yace sobre la parte positiva del eje horizontal, su origen coincide con el origen de coordenadas del sistema. El ángulo *trigonométrico* se "produce" al hacer rotar el rayo alrededor de su origen; esta rotación puede hacerse tanto en sentido horario como anti-horario. En el primer caso, el ángulo obtenido será negativo; en el segundo, el ángulo será positivo. El rayo en su posición original es el *lado inicial* del ángulo; el *lado final*, en cambio, es el rayo en la posición en la que se encontrará al detenerse la rotación.

Si la posición del lado final del ángulo está en uno de los cuadrantes, se dice que el ángulo es o está en dicho cuadrante. El lado final también podría yacer en uno de los ejes.

Con esta nueva definición de ángulo, hay que recalcar que la coincidencia de los lados finales de un par de ángulos no los hace iguales. Por ejemplo, el ángulo de 0 grados y -360 grados "coinciden geoméricamente", pero las medidas indican un proceso diferente de obtención de dicho ángulo. Este hecho también es fuente de errores.

5.3 Razones trigonométricas de un ángulo trigonométrico

Supongamos que $\angle AOB$ es un ángulo trigonométrico, cuyo lado inicial es el rayo \overline{OA} y el lado final, el rayo \overline{OB} . Para definir las razones trigonométricas de este ángulo, tendremos que considerar una circunferencia cuyo centro esté en el origen de coordenadas y un radio de longitud igual a 1 (en las mismas unidades del sistema de coordenadas, por supuesto). En el dibujo siguiente, se ilustran un ángulo en el segundo cuadrante y otro en el cuarto:



Los puntos P y Q son la intersección de los lados finales y la circunferencia, respectivamente. Nombremos, en ambos casos, con x y y las coordenadas de los puntos P y Q . Hay que notar, que en el caso del ángulo del segundo cuadrante, x es un número negativo y y es positivo; en cambio, para el ángulo del cuarto cuadrante, x es positivo y y , negativo.

Los puntos P_x y P_y son las proyecciones ortogonales del punto P sobre los ejes, mientras que Q_x y Q_y son las respectivas proyecciones del punto Q .

Para definir las razones trigonométricas del ángulo $\angle AOB$ (el rojo), vamos a utilizar las funciones trigonométricas del ángulo $\angle P_xOP$ en el triángulo $\triangle P_xOP$. Por ejemplo, ¿a qué es igual el seno del ángulo $\angle P_xOP$ como ángulo del triángulo $\triangle P_xOP$? En ese caso, el cociente entre la longitud del cateto opuesto al ángulo y la longitud de la hipotenusa; es decir:

$$\text{sen } \angle P_xOP = \frac{|y|}{OP} = \frac{y}{1} = y,$$

pues $y > 0$, ya que las coordenadas de P son (x, y) y P está en el segundo cuadrante; la hipotenusa mide 1, pues el radio de la circunferencia es 1.

El coseno de ese mismo ángulo en el triángulo es:

$$\text{cos } \angle P_xOP = \frac{|x|}{1} = -\frac{x}{1} = -x,$$

ya que $x < 0$.

En el caso del ángulo $\angle AOC$ (el verde), el seno y el coseno del ángulo $\angle Q_xOQ$, como ángulo del triángulo rectángulo $\triangle Q_xOQ$ son:

$$\operatorname{sen} \angle Q_xOQ = \frac{|y|}{1} = -y \quad \text{y} \quad \operatorname{cos} \angle Q_xOQ = \frac{|x|}{1} = x,$$

pues $x > 0$ y $y < 0$, porque el punto Q está en el cuarto cuadrante.

La definición de las nuevas razones trigonométricas, independientemente de si el lado final está en el segundo o cuarto cuadrante, simplemente define el seno del ángulo igual a la ordenada de P o de Q , mientras que el coseno es la abscisa de P o de Q .

En resumen, si $\angle AOD$ es un ángulo trigonométrico, R es el punto de intersección del lado final \overline{OD} con la circunferencia de radio 1 y las coordenadas del punto R son (x, y) , las razones del ángulo $\angle AOD$ (trigonométrico) se definen de la manera siguiente:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \angle AOD &= y, & \operatorname{cos} \angle AOD &= x, & \operatorname{tan} \angle AOD &= \frac{y}{x}, \\ \operatorname{cot} \angle AOD &= \frac{x}{y}, & \operatorname{sec} \angle AOD &= \frac{1}{x}, & \operatorname{csc} \angle AOD &= \frac{1}{y}. \end{aligned}$$

Las definiciones de la tangente, cotangente, secante y cosecante están restringidas para los casos en los que los denominadores sea iguales a 0; es decir, las razones trigonométricas no están definidas para todos los ángulos.

Las nuevas razones se han definido a partir de las ya dadas para ángulos en un triángulo rectángulo, pero ahora son para ángulos en un sistema de coordenadas. Esta diferencia es crucial, pero fuente de numerosas dificultades y errores en el aprendizaje de la Trigonometría.

Con estas definiciones y las propiedades de las razones trigonométricas de los ángulos en un triángulo rectángulo, se obtienen las propiedades básicas de las funciones trigonométricas.

El cálculo de las razones trigonométricas de ángulos como 120° , 135° , -45° , -300° , etcétera son una oportunidad para mostrar la diferencia entre las razones trigonométricas de los nuevos ángulos y las del sistema antiguo.

5.4 Periodicidad

La definición de las razones trigonométricas dada depende únicamente de la posición del lado final; no importa cuántas “vueltas” dio el lado inicial ni en que dirección lo hizo; lo único que importa finalmente es la posición del lado final. Esto introduce la noción de periodicidad, y con ello una serie de fórmulas que permiten calcular las razones de un ángulo cualquiera en función únicamente de las funciones de ángulos agudos y positivos. Este resultado es, al mismo tiempo, una fuente para explicar el nuevo concepto y, también, ¡fuente de dificultades!

Esta noción de periodicidad, asociada al círculo a través del que se definen las razones trigonométricas, ofrece la posibilidad de introducir las aplicaciones a fenómenos físicos periódicos.

5.5 Funciones trigonométricas de “operaciones” entre ángulos

Dado que las medidas de los ángulos sobre los que se han definido las razones trigonométricas son números reales arbitrarios, y las operaciones elementales (suma y resta) son cerradas en el conjunto de los números reales, se obtienen las razones trigonométricas de la “suma de ángulos” y la “resta de ángulos”, de las cuales se derivan algunas otras, como las siguientes:

1. $\text{sen}(\angle A + \angle B) = \text{sen } \angle A \cdot \cos \angle B + \text{sen } \angle B \cdot \cos \angle A.$
2. $\text{cos}(\angle A - \angle B) = \text{cos } \angle A \cdot \cos \angle B + \text{sen } \angle B \cdot \text{sen } \angle A.$
3. $\text{sen}(2\angle A) = 2 \text{sen } \angle A \cdot \cos \angle A.$
4. $\text{cos}^2\left(\frac{\angle A}{2}\right) = \frac{1 + \text{cos } \angle A}{2}.$
5. $\text{cos } \angle A + \text{cos } \angle B = 2 \text{cos } \frac{\angle A + \angle B}{2} \cdot \text{cos } \frac{\angle A - \angle B}{2}.$

La generalización permite establecer una variedad de identidades y resolver ecuaciones en las que la incógnita aparece como un ángulo en una razón trigonométrica.

El último paso consiste en pasar de las razones trigonométricas a las funciones trigonométricas dentro del marco dado por la noción de función.

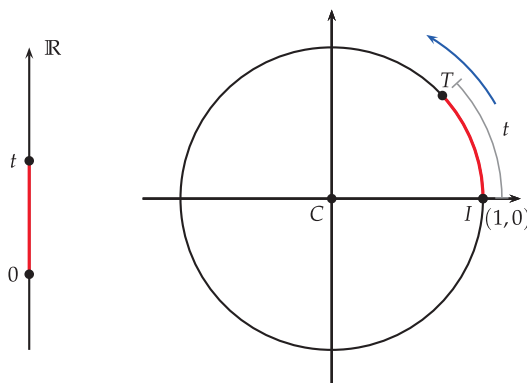
6 En el estadio autónomo

Ahora se van a definir las funciones trigonométricas como funciones cuyo dominio es un subconjunto de números reales y toma valores también el conjunto de los números reales. A manera de ejemplo, consideremos la definición de la función seno.

La función sen es una función de cuyo dominio es \mathbb{R} y toma valores en \mathbb{R} . Eso significa que dado cualquier número real t , debemos decir qué es exactamente $\text{sen } t$.

Con este propósito, procedemos de la manera siguiente. En primer lugar, suponemos que $t > 0$; luego se definirá para el otro caso.

Consideremos otra vez una circunferencia en un sistema de coordenadas, centrada en el origen del sistema. Sea T el punto de la circunferencia que se obtiene cuando el punto I , de coordenadas $(1, 0)$, “recorre” en el sentido anti-horario la circunferencia una distancia igual a t :



Para definir el valor que *la función coseno* y *la función seno* hacen corresponder al número t , utilizamos las coordenadas del punto T , respectivamente:

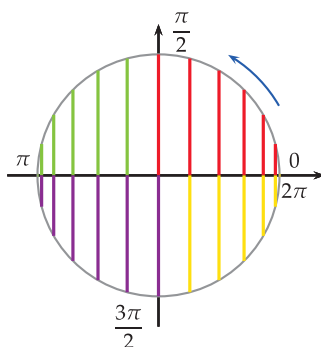
$$\operatorname{sen} t = \text{ordenada de } T \quad \text{y} \quad \operatorname{cos} t = \text{abscisa de } T.$$

Si el número t es negativo, el procedimiento es similar al anterior, excepto que el “recorrido” es realizado en sentido horario.

La diferencia más importante que aparece en esta nueva generalización es que el ángulo que se utiliza para la generalización no es igual al “argumento” de la función trigonométrica, sino el ángulo tendido por el arco de circunferencia determinado por los puntos I y T , según la dirección dada por el recorrido. Esto introduce un nuevo sistema de medida angular: el *radián*. Por supuesto, en este estadio hay que establecer las fórmulas de conversión entre los dos sistemas de medida angular.

De aquí en adelante, se estudian las *funciones trigonométricas* en relación a la *monotonía*, *extremos* e *inversión*. También se obtendrán los conjuntos imágenes (o recorrido) de las funciones, así como las propiedades relativas a la periodicidad. Con toda esta información se pueden “graficar” las funciones trigonométricas.

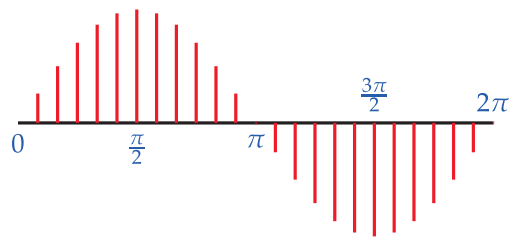
A manera de ejemplo, a partir del siguiente dibujo (con sus respectivos significados, por supuesto), se pueden explicar tanto la monotonía como los valores extremos de la función seno:



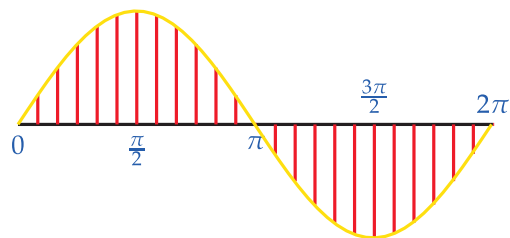
Se concluye que la función sen es:

1. *positiva* en el intervalo $(0, \pi)$;
2. *negativa* en el intervalo $(\pi, 2\pi)$;
3. *estrictamente creciente* en los intervalos $[0, \frac{\pi}{2}]$ y $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$;
4. *estrictamente decreciente* en el intervalo $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$;
5. Adicionalmente, $\operatorname{sen} t$ alcanza el valor:
 - (a) *máximo*, igual a 1, cuando $t = \frac{\pi}{2}$; y
 - (b) *mínimo*, igual a -1 , cuando $t = \frac{3\pi}{2}$.
6. El *recorrido* es igual al intervalo $[-1, 1]$,

y si se “colocan” los segmentos del dibujo anterior en un sistema de coordenadas, obtenemos una buena aproximación a la gráfica de la función seno:



Así, el gráfico de sen es, entonces, la curva que pasa por los extremos de los segmentos:



A estos contenidos hay que añadir la *paridad*, funciones *inversas*, para lo cual hay que introducir las nociones de *restricción* de una función, *inyectividad* y *sobreyectividad*.

Referencias

- [1] Rico, Luis. La Educación Matemática en la Secundaria. Cuadernos de Formación del Profesorado. 1997. Barcelona.

RESÚMENES

El desafío matemático de los sistemas abiertos en física y biología

R. Rebolledo¹

¹Facultades de Ingeniería y Matemáticas – Universidad Católica de Chile.

emails: rrebolle@ing.puc.cl

Resumen

La noción de sistema abierto ha venido a extender la de sistema cerrado, motivada por los descubrimientos de la física y la biología durante el siglo XX. En una primera aproximación, podemos decir que está constituido por una parte de la Naturaleza que contiene nuestros observables (y que llamaremos el sistema principal) y contiene además una descripción de la relación de esta parte con su entorno, representada por la noción de estado. Diversas disciplinas matemáticas han visto la luz al buscar representar esta noción de sistema. La conferencia mostrará a través de ejemplos la forma en que la noción de sistema abierto da un fundamento natural a la relación entre procesos estocásticos y ecuaciones diferenciales parciales.

Simulación del crecimiento de grietas en materiales. Estimación paramétrica y semiparamétrica de la distribución de tiempos de fallo

Antonio Meneses-Freire¹, Salvador Naya², Ignacio López de Ullibarri², Javier Tarrío-Saavedra²

¹Universidad Nacional de Chimborazo, ²Universidade da Coruña

emails:

antoniomenesesfreire@hotmail.com, salva@udc.es, ilu@udc.es, jtarrío@udc.es

Resumen

La ecuación de Paris, es un modelo muy utilizado para reproducir longitudes de grieta en ensayo por fatiga de materiales. El presente trabajo se basa en la simulación de longitudes de grietas con la solución de la ecuación de Paris, las grietas se censuran por el tiempo $t_c = 0,15$ y longitud crítica de grieta $a_c = 0,5$ (fallo). Las grietas censuradas se ajustan con dos métodos: Con *nlme* (modelo no lineal de efectos mixtos) y el método propuesto *lme* (modelo lineal de efectos mixtos). El objetivo de los dos ajustes es estimar los coeficientes C y m del modelo de Paris, el primero por máxima verosimilitud y el segundo por linealización en Paris. Con los pares (C, m) , la solución de Paris simula curvas de longitudes de grietas que intersecan en la recta $a_c = 0,5$, estos puntos de intersección son tiempos donde se produce el fallo. La distribución de tiempos de fallo para *nlme* es simulada por Montecarlo, mientras para *lme* es simulada mediante *bkde* (binned kernel density estimate).

The critical mass problem and the Polya Urn (El problema de masa crítica como un problema de la Urna de Polya)¹

Alexandra M. Espinosa¹, José Ramírez¹

¹Facultad de Ciencias, Departamento de Matemática, Escuela Politécnica Nacional, Quito, Ecuador.

emails: alexandra.miranda@epn.edu.ec, jose.ramirez@epn.edu.ec

Abstract

This paper analyzes the properties of the critical mass problem (Schelling, 1978; Granovetter, 1978) under the hypothesis of individual probabilities of participation, $X_{ij}(t)$, being a random variable with identical distribution function F_{ij} for all individuals i belonging in the group j . Under the interchangeability hypothesis (De Finetti, 1931; Hewitt and Savage, 1955) of the $X_{1j}(t), \dots, X_{N_{ij}}(t)$ random variables, it can be proven that, the relative frequency of participation inside the group j distributes as Beta $B[\alpha_j, \beta_j]$ (Blackwell and Kendall, 1964; Freedman, 1965). The replacement parameter c_i controls the contagium or immunization to a participation in the model, an attractive formalization of the critical mass problem.

Key words: Critical Mass Problem, Polya Urn, Beta, Gamma y Dirichlet distributions, Interchangeability.

AMS Classification: 33B15, 62P20

Resumen

Este artículo analiza las propiedades del modelo de masa crítica de participación (Schelling, 1978; Granovetter, 1978) bajo la hipótesis de que la probabilidad individual $X_{ij}(t)$ de participación es una variable aleatoria con una función de distribución F_{ij} idéntica para todo individuo i perteneciente a un grupo j en el período t . Bajo la hipótesis de intercambiabilidad de las variables $X_{1j}(t), \dots, X_{N_{ij}}(t)$, (De Finetti, 1931; Hewitt and Savage, 1955) la distribución de frecuencias relativas de participación de los individuo de un grupo j se distribuye como una Beta $B[\alpha_j, \beta_j]$ (Blackwell and Kendall, 1964; Freedman, 1965). El parámetro de reemplazo c_i permite considerar el contagio o la inmunización de las poblaciones a la participación, adecuado para representar problemas de masa crítica. Las aplicaciones son considerables.

Palabras clave: Masa crítica de participación, Urna de Polya, Distribución Beta, Gamma y Dirichlet, Intercambiabilidad.

Clasificación AMS: 33B15, 62P20

Subsidios regresivos o transferencias progresivas un análisis desde la eficiencia y equidad para el subsidio al gas

Emanuel Daniel Yaselga Alvarado¹, Juan Ponce¹

¹*Universidad San Francisco de Quito, USFQ*

emails: emanuelqx@gmail.com

Resumen

La presente investigación busca analizar los efectos que tendría en la pobreza y desigualdad frente a la eliminación del subsidio al gas y cambiarlo por una política de transferencia de estos fondos al Bono de Desarrollo Humano (BDH).

Construcción y validación de un método geo-estadístico para la elaboración de mapas de contaminación acústica en áreas urbanas y su aplicación a un sector de Quito

René Villareal¹, Luis Horna¹

¹*Departamento de Matemática, Escuela Politécnica Nacional, Quito, Ecuador.*

emails: rreennee@outlook.com, luis.horna@epn.edu.ec

Resumen

Se propone un método basado en la interpolación geo-estadística Kriging y la métrica de costo para construir mapas de contaminación sonora en áreas urbanas. Se hizo la modelización matemática y se construyó un mapa de contaminación acústica e indicadores de afectación asociados a este mapa utilizando la densidad poblacional del área. Esto, para un sector del Centro Histórico de Quito y a partir de datos recolectados para esta investigación. Posteriormente se realizó una validación con los métodos ya establecidos basados en la acústica y que se elaboran por parte de la Secretaría de Ambiente del Municipio de Quito.

Extending the applicability of Newton's method for k -Fréchet differentiable operators in Banach spaces

I. K. Argyros¹, D. González²

¹Department of Mathematical Sciences, Cameron University, Lawton, OK, USA.

²Center on Mathematical Modelling, Escuela Politécnica Nacional, Quito, Ecuador.

emails: iargyros@cameron.edu, daniel.gonzalezse@epn.edu.ec

Abstract

The Newton-Kantorovich theorem (Kantorovich, L. V. et al.) is proved for the operator F defined on a convex subset \mathcal{D} of a Banach space \mathcal{X} with values in a Banach space \mathcal{Y} and the starting point x_0 to solve $F(x) = 0$ using Newton's method under the following conditions:

(C₁) there exists $\Gamma_0 = [F'(x_0)]^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$ for some $x_0 \in \mathcal{D}$ and $\|\Gamma_0 F(x_0)\| \leq \eta$,

(C₂) $\|\Gamma_0 F''(x)\| \leq l$, for $x \in \mathcal{D}$,

(C₃) $l\eta \leq \frac{1}{2}$ and $\bar{U} \left(x_0, \frac{1 - \sqrt{1 - 2l\eta}}{l} \right) \subset \mathcal{D}$.

Ever since, many studies have been published under Lipschitz-type conditions on the derivatives of operator F' . In these studies, the Newton-Kantorovich result is extended by relaxing especially condition (C₂).

Now, we present a new semilocal convergence analysis for Newton's method under the same computational cost as in Ezquerro et al., 2012 and Ezquerro et al., 2014. In this analysis, suppose there exist scalar functions $f \in \mathcal{C}^{(k)}([0, t'])$ and $g : [0, t'] \rightarrow \mathbb{R}$ continuously differentiable and non-decreasing, with $t' > 0, k \geq 3$, that satisfy:

(K₁) there exists $\Gamma_0 = [F'(x_0)]^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$ for some $x_0 \in \mathcal{D}$, $\|\Gamma_0 F(x_0)\| \leq -\frac{f(0)}{g(0) - 1}$

and $\|\Gamma_0 F^{(i)}(x_0)\| \leq f^{(i)}(0)$, with $i = 2, 3, \dots, k - 1$ and $k \geq 3$,

(K₂) $\|\Gamma_0 F^{(k)}(x)\| \leq f^{(k)}(t)$, for $\|x - x_0\| \leq t, x \in \mathcal{D}$ and $t \in [0, t']$,

(K₃) $\|\Gamma_0(F'(x) - F'(x_0))\| \leq g(\|x - x_0\|)$, for $\|x - x_0\| \leq t, x \in \mathcal{D}$ and $t \in [0, t']$,

(K₄) $f \in \mathcal{C}^{(k)}([0, t'])$ be with $t' \in \mathbb{R}, k \geq 3$, such that $f(0) > 0, f'(0) < 0, f^{(i)}(0) > 0$, for $i = 2, 3, \dots, k - 1, f^{(k)}(t) > 0$.

The new sufficient convergence conditions are weaker, the error estimated more precise and the information on the location of the solution at least as precise as in Ezquerro et al., 2012 and Ezquerro et al., 2014.

Numerical examples are given to show the advantages of our approach for special non-linear equations.

The Earth's Free Oscillations: An Invitation to Study a Class of Spectral Problems

Bernard Valette¹

¹*Institut des Sciences de la Terre, France.*

emails: Bernard.Valette@univ-savoie.fr

Abstract

Analysing the Earth's dynamics around an uniformly rotating configuration of equilibrium leads to study the spectrum of a family of the type $L(\lambda) = F(\lambda) + A$, where A is an unbounded self-adjoint operator with a non empty essential spectrum, and $F(\lambda)$ is a bounded operator which depends analytically upon the complex frequency λ . More generally, we may consider analytical family $L(\lambda)$ of paraclosed operators over a fixed domain. We give a criterion to insure the boundedness of the essential spectrum of A , and of the family $L(\lambda)$, based on a decomposition of the operators over specific subspaces. In the case of the Earth, taking A as the gravito-elastic operator, we derive the complete description of the spectrum. We obtain precise bounds for the essential spectrum which is related to the convective dynamics of the liquid outer core, with in addition, embedded in it, some eigen-values of rotational modes as the Chandler wobble or the free core nutation. We also derive min-max principles for the infinite seismic discrete spectrum (with periods shorter than one hour), which corresponds to the signal recorded by seismic stations all over the world. We finally formulate open problems related to the gravito-inertial spectrum in relation to the shape of the boundary of the liquid Earth's core.

Un índice difuso de niveles socioeconómicos en Quito

Marcelo Salvador¹, Larrea Carlos², Philippe Belmont², Camilo Baroja²

¹Facultad de Ciencias Administrativas, Escuela Politécnica Nacional, Quito, Ecuador.

²Universidad Andina Simón Bolívar, Quito, Ecuador.

emails: xsalmar@hotmail.com, clarrea2000@yahoo.com, philippebelmont@gmail.com, baroja_camilo@yahoo.com.mx

Abstract

The purpose of socio-economic indices is to difference the standard of living of a family in comparison with others. It can be defined multidimensional socioeconomic indices in terms of education of the household head, the characteristics of the home, goods possession and other features as did the INEC by a weighted score of the factors. But it is also possible to obtain an index based on family expenses. This study has followed this approach. To do this, it have been used household expenditure estimates according to a regression model of small areas based on the following variables: housing, education, economic aspects, ownership of goods, information technology and consumer habits. The results of this regression model were converted to standardized dollars (2006). Thresholds classes established by the World Bank's paper "Ferreira, Francisco HG et al. Economical Mobility and the Rise of the Latin American Middle Class. Washington DC World Bank" expressed in units of purchasing power parity (or PPP see: Ravallion, Datt, & Walle, 1991) were also calculated in standardized dollars (2006) and using the cumulative frequencies in the study area, reference values were established for the values of the diffuse index between 1 and 5 and by nonlinear regression were fitted to a smooth curve. This function is used to calculate the index of all households surveyed. Finally using kriging, this index was mapped in Quito using census information of 2001 and 2010.

Key words: socioeconomic indices, Fuzzy Math, small area regression, kriging, Quito.

Resumen

El objetivo de los índices socioeconómicos es establecer la diferencia de nivel de vida de la familia en comparación con otra. Se pueden definir índices socioeconómicos multidimensionales en función de la educación del jefe de familia, las características de su vivienda, los bienes que dispone el hogar y otros como ha hecho el INEC mediante un puntaje ponderado de factores. Pero también es posible obtener un índice en base a los gastos de la familia. En este estudio se ha seguido este enfoque. Para hacerlo se han usado los gastos familiares estimados según un modelo de regresión de pequeñas áreas basado en las siguientes variables: vivienda, educación, aspectos económicos, posesión de bienes, tecnologías de información y hábitos de consumo. Los resultados de este modelo de regresión fueron convertidos a dólares estandarizados (2006). Los umbrales de las clases sociales establecidos por la publicación del Banco Mundial "Ferreira, Francisco, H. G. et al. Economical Mobility and the Rise of the Latin American Middle Class. Washington D. C. World Bank" expresados en unidades de paridad de poder adquisitivo (o PPP ver: Ravallion, Datt, & Walle, 1991) también fueron calculados en dólares estandarizados (2006) y utilizando las frecuencias acumulativas en el área de estudio se establecieron valores referenciales para el índice difuso entre 1 y 5 y mediante regresión no lineal se ajustaron a una curva continua. Esta función se utilizó para calcular el índice de todas las familias censadas. Finalmente mediante la metodología de kringeo se mapeo este índice en la ciudad de Quito usando los censos del 2001 y 2010.

Palabras clave: índices socioeconómicos, matemática difusa, regresión en áreas pequeñas, kringeo, Quito.

Desigualdad de oportunidades en Ecuador

Gabriel Castañeda¹

¹*Escuela Politécnica Nacional, Quito, Ecuador.*

emails: gabobuho14@gmail.com

Resumen

Habitualmente, la igualdad de oportunidades es limitada al concepto de igualdad de género, sin embargo, teóricamente la igualdad de oportunidades es un concepto mucho más amplio, el cual considera las esferas de: etnia, circunstancias socio económicas, xenofobia, movilidad intergeneracional y, por supuesto, la igualdad de género. Su concepto nace de las ideas de Jhon Rawls (1971) pero su estudio empírico lo realiza por primera vez Jhon Roemer en 1998. Roemer tiene como suposición básica que la distribución de renta observada, u otro resultado, es el reflejo de dos causas diferentes: las circunstancias y los esfuerzos. Por su parte, las circunstancias son variables que afectan a la generación de ingresos de los individuos y que están fuera de su control, tal como su dotación genética, raza, género, estatus socioeconómico de su familia, etc. El término esfuerzos se refiere a las variables que son de responsabilidad del individuo tal como el tipo de trabajo elegido, la educación alcanzada, las horas de trabajo, el esfuerzo en el trabajo, etc.

Cuando la desigualdad de ingresos proviene de las variables de esfuerzo, se la considera socialmente como aceptable, mientras que, la desigualdad proveniente de variables de circunstancia, se la considera incluso como "injusta". De esta manera, Igualdad de Oportunidad existe si los ingresos son estocásticamente independientes de las variables circunstanciales. Así, de manera conceptual podría existir una sociedad extremadamente desigual en términos de resultados pero con Igualdad de Oportunidades en el acceso, este caso es factible cuando la desigualdad de ingresos proviene únicamente de las variables del tipo esfuerzo.

En el presente trabajo se calcula el nivel de Desigualdad de Oportunidad en el acceso a ingresos, tanto a nivel nacional como para las 9 ciudades auto-representadas y se jerarquizan las variables que más impactan en la reducción de la desigualdad de oportunidades. Además, se desarrolla el paquete IOIndex (Inequality of Opportunity Index) en el software estadístico R que permite la automatización de la medición de la D.O. para estudios posteriores.

Un modelo de programación entera para la asignación de flota en el Sistema de Transporte Metrobús-Q

Raúl Pineda¹, Luis Miguel Torres¹, Ramiro Torres¹

¹*Facultad de Ciencias, ModeMat, Escuela Politécnica Nacional, Quito, Ecuador.*

emails:

raul.pineda@epn.edu.ec, luis.torres@epn.edu.ec, ramiro.torres@epn.edu.ec

Resumen

El presente trabajo considera el problema de asignación de flota en el contexto del Sistema Integrado de Transportación Pública Metrobús-Q. El problema consiste en el cubrimiento de un conjunto de viajes conocidos a-priori con una flota de vehículos heterogénea y almacenada en múltiples depósitos, mientras se minimizan los costos operacionales. Para ello, un modelo de programación lineal entera basado en flujos multi-producto es presentado. Inicialmente proponemos la implementación del modelo en el solver de programación entera GUROBI, un método heurístico y la obtención de cotas inferiores basados en algoritmos de flujos de costo de mínimo.

Design of balanced diets for 1-3 year-old children from government daycare centers

Sandra Gutiérrez¹, Fernanda Salazar¹, Adrián Sarango¹

¹*Facultad de Ciencias, Departamento de Matemática, Escuela Politécnica Nacional, Quito, Ecuador.*

emails: sandra.gutierrez@epn.edu.ec, fernanda.salazar@epn.edu.ec, dampil.ad12@hotmail.com

Abstract

We study the case of government day-care centers in Ecuador, which provide 70% of daily required nutrients to 1-3 year-old children. First, we present an analysis of prices of food in two geographical regions of the country. Afterwards, we discuss a nutritional evaluation of current diets served at day-care centers. In order to provide variety to the diet suggested by the model, we have formulated an integer linear program version of the Stigler's Diet Problem in which we take into account not only the satisfaction of lower or upper bounds of nutrients but also their balanced intake. Finally, we present an analysis of computational results and conclusions for the problem.

Size and weight-constrained graph partitioning

Diego Recalde¹, Ramiro Torres¹

¹*Facultad de Ciencias, Departamento de Matemática, Escuela Politécnica Nacional, Quito, Ecuador.*

emails: `diego.recalde@epn.edu.ec`, `ramiro.torres@epn.edu.ec`

Abstract

Graph partitioning is about decomposing a graph into smaller parts satisfying certain conditions. We present a compact mathematical formulation for a clique partitioning problem with constraints over the number of nodes and total weight of the edges on each clique. A case-study related to sport team realignment is presented, together with two solving techniques: a Branch & Bound approach and a heuristic approach. Finally, computational results with real world instances are provided.

On Constructing Round-Robin Schedules

Frits Spieksma¹

¹*KU Leuven, Belgium.*

emails: `Frits.Spieksma@kuleuven.be`

Abstract

Sport in general, and soccer in particular, has become a major business involving many stakeholders, such as teams, police, fans, sponsors, and broadcasting companies. Huge amounts of money are being paid for the broadcasting rights, thereby illustrating the economic value of soccer competitions. This also emphasizes the relevance of finding a good schedule for the competition. Each involved party has numerous (possibly conflicting) constraints and wishes, and a schedule that satisfies all constraints and wishes simply doesn't exist. Hence, constructing a schedule that is considered fair, and that is acceptable to all parties, is a challenge.

We describe our experience in scheduling the highest division in the Belgian soccer league over the last seasons. We discuss different characteristics of the generated schedules such as the presence of breaks, and the carry-over effect. We outline the different models that we used, we describe how we solved them, and we conclude by summarizing the advantages of using model-based schedules: transparency, perceived fairness, and, simply, the quality of the schedule.

Modelo de programación lineal entera para la generación de horarios de clase en universidades

María Belén Heredia¹

¹*Facultad de Ciencias, ModeMat, Escuela Politécnica Nacional, Quito, Ecuador.*

emails: mabe15hg@hotmail.com

Resumen

El problema de horarios de clase consiste en la asignación, sujeta a restricciones, de un número de sesiones de clase y recursos asociados (generalmente profesores y aulas), a un número limitado de períodos, de tal forma que cada sesión sea dictada por un profesor en un aula específica y en un período determinado dentro del horizonte de planificación, que generalmente es una semana. Existen diversas formas de formular matemáticamente este problema, y durante las últimas décadas se han propuesto algoritmos de solución, tanto de tipo exacto como heurístico. En el trabajo se presenta un modelo de programación lineal entera para resolver dicho problema en la Facultad de Ciencias, una heurística constructiva y una heurística de mejora, así como los principales resultados computacionales obtenidos.

Índices de poder de la teoría de juegos y cambios en la agricultura brasileña

Fernando Luis Garagorry¹

¹*Secretaria de Gestao Estrategica SGE, Brasil.*

emails: fernando.garagorry@embrapa.br

Resumen

En Brasil, la distribución espacial de gran parte de los productos agrícolas cambia a lo largo del tiempo. Algún concepto de distancia, entre las distribuciones correspondientes a dos años, permite identificar muchos de los cambios más importantes. Pero, en ciertos casos, una distancia pequeña puede ocultar determinadas alteraciones importantes en la distribución territorial de un producto. En esas situaciones, el uso de los índices de poder de Shapley y de Banzhaf, utilizados en teoría de juegos, ha permitido detectar alteraciones espaciales significativas, que podrían haber sido ignoradas. El enfoque ha sido utilizado también para identificar cambios en los tipos de uso agrícola del suelo, así como en el valor monetario de la producción de diferentes subsectores de la agricultura. La técnica principal usada hasta el momento se basa en considerar una distribución entre n alternativas ($n > 2$) como un juego de votación, en que cada jugador dispone de un peso igual a su parte en la distribución, y donde son ganadoras solamente las coaliciones que reúnen más de la mitad del total de los pesos.

Grupo Fundamental de un Grupo de Transformaciones

Bryan Maldonado¹

¹*Universidad San Francisco de Quito, USFQ.*

emails: bryan_patricio@hotmail.com

Resumen

En 1966, F. Rhodes introdujo la idea del grupo fundamental de un grupo G de homeomorfismos de un espacio topológico X . Su artículo contiene demostraciones que resumen los resultados importantes y ha sido estudiado desde entonces, principalmente debido a que la categoría de grupo de transformación es más general que la categoría de los espacios topológicos. A continuación se presenta un estudio a fondo del trabajo de Rhodes con ejemplos para enriquecer la teoría. El Dr. James Montaldi de la Universidad de Manchester ha contribuido recientemente a esta teoría con una forma más general y aplicable del teorema principal de Rhodes. Sus resultados también se analizan aquí.

Polinomios ortogonales matriciales

Juan Tirao¹

¹Universidad de Córdoba, Argentina.

emails: jatirao@yahoo.com.ar

Resumen

La teoría de polinomios ortogonales matriciales fue iniciada por Krein en 1949 y tuvo un marcado impulso en la segunda mitad de los noventa, siendo hoy un área en franco desarrollo. La teoría es una generalización de la teoría clásica de polinomios ortogonales escalares iniciada por Stieljes en 1894. Las principales aplicaciones y conexiones se dan con la teoría de la aproximación, la teoría de la probabilidad, la teoría de representaciones de grupos y se prevé la existencia de una importante relación con la teoría de anillos no conmutativos. En esta exposición daremos una idea de cómo obtener sucesiones de polinomios ortogonales matriciales asociadas al espacio proyectivo complejo $P_n(\mathbb{C}) = \text{SU}(n+1)/\text{U}(n)$ y enfocaremos nuestra atención en la relación de recurrencia de tres términos que ellas satisfacen. Sorprende que la correspondiente matriz M semi-infinita tridiagonal en bloques sea estocástica. Esta matriz M depende de un número de parámetros libres que tienen un significado en la teoría de representaciones de grupos. Es importante destacar que las herramientas desarrolladas en una serie de trabajos relacionados de F.A. Grünbaum, I. Pacharoni y J.T. permiten dar expresiones explícitas en términos de integrales definidas de todas las entradas matriciales de cualquier potencia de M . Esto significa que si uno logra imaginar una interesante cadena de Markov cuya matriz de probabilidad de transición de la etapa $t \mapsto t+1$ sea M , tendríamos una fórmula explícita para las entradas de la matriz de probabilidad de la transición $t \mapsto t+n$. Esto es exactamente lo que propusieron Karlin y McGregor, en su artículo "Random walks" de 1959, para explotar propiedades de los polinomios ortogonales y el rol que ellos juegan en el análisis espectral para ciertas matrices tridiagonales finitas o semi-infinitas.

Sistemas de Alerta Temprana

Emanuel Yaselga Alvarado¹, Miguel Acosta¹

¹*Universidad San Francisco de Quito, USFQ.*

emails: emanuelqx@gmail.com, acostam@hotmail.com

Resumen

El estudio realiza un análisis de los posibles instrumentos para la construcción de un sistema de alertas tempranas del sector real que permita analizar los ciclos y tendencias de los sectores económicos de manera mensual e inferir de manera anticipada o coincidente. El Sistema de Alertas cubre tres ejes: el primer eje corresponde a las variables utilizadas para la construcción de indicadores a nivel mensual. El segundo corresponde al análisis exploratorio y correlativo de una propuesta de construcción de indicadores. El tercer eje identifica aquellos sectores que presenten desaceleración y decrecimiento bajo los indicadores seleccionados. El sistema implementa un visualizador dinámico en Google Chart y su construcción utiliza STATA y R.

Leyes empíricas de Quito, Guayaquil y ciudades del Ecuador

Felipe Vaca¹, Bolívar Morales¹, Carlos José Jiménez-Mosquera

¹*Universidad San Francisco de Quito, USFQ.*

emails: felipevacar@gmail.com, cjimenez@usfq.edu.ec

Resumen

Estudiar las ciudades resulta de gran interés en la actualidad, no sólo por el papel que esto juega en el ámbito de la política pública, sino también por la particularidad del comportamiento de variables asociadas a las mismas, en especial aquellas de tipo geográfico o espacial. En efecto, numerosos trabajos han mostrado que las distribuciones de probabilidad caracterizadas por la media y varianza resultan inadecuadas para expresar regularidades asociadas a dichas variables. Esto se debe a que los datos no se aglomeran alrededor de un valor central; más bien, las colas se vuelven pesadas y los eventos extremos menos improbables que bajo otras distribuciones.

En este sentido, el presente trabajo apunta a encontrar leyes empíricas sobre algunas de las variables relevantes de la ciudad de Quito. Para ello, se parte de la hipótesis de que éstas se distribuyen bajo una ley potencia y se estiman y contrastan distribuciones de cola pesada que ajusten adecuadamente los datos escogidos.

Algoritmo de Newton paralelizado para la resolución del flujo de un fluido de Bingham en una tubería

Sofía López¹

¹*Facultad de Ciencias, ModeMat, Escuela Politécnica Nacional, Quito, Ecuador.*

emails: sofia.lopezo@epn.edu.ec

Resumen

Un fluido de Bingham es un fluido visco-plástico que es caracterizado por un umbral de estrés. Es decir que el material debe exceder el umbral de estrés para iniciar su movimiento. El fluido se comporta como un sólido cuando el estrés está bajo el umbral y como un fluido viscoso cuando se supera el umbral. El problema del flujo estacionario y laminar de un fluido de Bingham en una tubería es resuelto con un algoritmo de Newton Semismooth paralelizado. Se usa la técnica de descomposición de dominio y se aplica el algoritmo de Schwarz para resolver el problema en cada subdominio.

Resolución de un problema inverso para la actividad eléctrica del corazón utilizando el modelo de Beeler Reuter

Gabriela Noroña¹

¹*Facultad de Ciencias, ModeMat, Escuela Politécnica Nacional, Quito, Ecuador.*

emails: magabbynyp@myself.com

Resumen

El modelo de Beeler-Reuter del potencial de acción miocárdial ventricular es un modelo biofísico que describe la actividad eléctrica de una célula cardíaca. En este trabajo, dicho modelo es implementado y utilizado en un problema inverso, el cual nos permite estimar las condiciones iniciales óptimas de las sustancias químicas sensibles involucradas.

Existe muy poca teoría sobre los problemas con el control en las condiciones iniciales; esta es la razón por la cual se propone el método del lagrangiano para obtener dichas condiciones. La formulación de un problema inverso también requiere de controles admisibles, la descripción matemática del sistema que va a ser controlado, el costo y las restricciones que deben ser satisfechas.

La resolución del problema inverso involucra además la resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias; por esta razón, cuatro métodos numéricos fueron implementados para aproximar dichas ecuaciones: Bogacki Shampine, Euler explícito, Método del Gradiente y Método de Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno.

Finalmente, para calcular el costo de la función a minimizar, se incluye la condición de optimalidad. El costo debe ser especificado para evaluar el rendimiento del sistema cuantitativamente.

Algoritmos de Optimización para la Resolución Numérica de una Clase de Inecuaciones Variacionales

Sergio González-Andrade¹

¹Facultad de Ciencias, ModeMat, Escuela Politécnica Nacional, Quito, Ecuador.

emails: sergio.gonzalez@epn.edu.ec

Resumen

En este trabajo nos enfocamos en la solución del siguiente tipo de problemas de optimización: hallar $u \in W_0^{1,\nu}(\Omega)$ tal que

$$\min_{u \in W_0^{1,\nu}} J(u) := \frac{1}{\nu} \int_{\Omega} |\nabla u|^{\nu} dx + g \int_{\Omega} |\nabla u| dx - \int_{\Omega} fu dx,$$

donde $1 < \nu < \infty$, $g > 0$ y $f \in W^{-1,\nu'}(\Omega)$. Este tipo de problemas aparecen naturalmente en la modelización de fluidos no Newtonianos (modelo de Herschel-Bulkley). Proponemos estudiar una familia de problemas regularizados a través de un proceso de Huber. Analizamos la existencia de soluciones para esta familia de problemas regularizados y la convergencia de las soluciones regularizadas hacia la solución del problema original. Posteriormente, estudiamos la discretización por elementos finitos de los problemas regularizados. Nuestro interés principal es desarrollar un algoritmo eficiente, basado en métodos de optimización, para la resolución numérica de los problemas en estudio. Siguiendo ideas propuestas para la resolución numérica de problemas con operador asociado de tipo p-Laplaciano (ver Y.Q. Huang et al. 2007), proponemos un algoritmo de descenso preconditionado combinado con una técnica de linesearch de interpolación. Finalmente, presentamos varios experimentos numéricos, haciendo particular énfasis en la simulación numérica del flujo laminar de fluidos no Newtonianos.

Diseño y planeamiento óptimo de cadenas de suministros considerando la performance de los procesos productivos

Gabriela Corsano¹

¹Universidad del Litoral, Argentina.

emails: gcorsano@santafe-conicet.gov.ar

Resumen

El problema de diseño y planificación de una cadena de suministro (CS) consiste en integrar globalmente las unidades productivas con sus fuentes de suministros y sus clientes, y coordinar todos los flujos de entrada y salida (materiales, información y finanzas) de tal manera que los productos sean producidos y distribuidos en las cantidades correctas, en las localizaciones apropiadas y en el tiempo adecuado. La optimización de la CS tiene un amplio interés tanto en el sector industrial como académico. Desde el punto de vista industrial, la competitividad, los niveles de servicios y las performances económicas han sido algunos de los intereses principales. Desde el punto de vista académico, la optimización de CS involucra una variedad de problemas de decisión con diferentes horizontes de tiempo y objetivos. Estos van desde el nivel estratégico al operativo, pasando por el nivel táctico. En esta charla, se abordará el problema de integración de los diferentes niveles de decisión en CS, presentando un enfoque holístico, basado en programación matemática, y resaltando la importancia de la optimización simultánea.

Optimización de líneas y frecuencias en un sistema de transporte público

Rubén Freire¹

¹*Escuela Politécnica Nacional, Quito, Ecuador.*

emails: rubenfreb@gmail.com

Resumen

La Planificación de Líneas es un problema de optimización relativamente nuevo, los primeros experimentos con relación a este problema datan de los años sesenta. En los noventas se lo comienza a tratar como problema de programación entera y surgen conceptos como *System Split* donde se asignan a los pasajeros a los diferentes tipos de transporte como paso previo a la generación de líneas y frecuencias. Posteriormente, algunos investigadores dejan de lado este concepto y nacen aproximaciones donde los modelos escogen la mejor opción para los pasajeros (por ejemplo el camino más corto) para ir de una estación a otra. En el presente trabajo se analiza el problema de planificación de líneas considerando viajes directos, es decir, el modelo no permite que los pasajeros realicen transferencias entre líneas para llegar a sus destinos. Se estudió la complejidad computacional de este modelo sobre grafos que resultan de la forma del Sistema Trolebús y se demostró que pertenecen a la clase NP-completa incluso si se opera el sistema con líneas cerradas. Algoritmos polinomiales para algunos casos especiales del problema son presentados. Al final, se resuelven instancias reales con datos tomados del Sistema Trolebús.

Análisis de la longevidad bajo el método Kannisto-Thatcher

Lenin Martínez¹

¹Universidad Carlos III de Madrid, España.

emails: ls290586@gmail.com

Resumen

El estudio de las edades avanzadas ha sido tema de investigación por varios profesionales de la bioestadística, la matemática, entre otras disciplinas. Una de ellas ha tenido mucha importancia, nos referimos a los estudios realizados por Kannisto, Thatcher et al. (1998) quienes aportaron en su trabajo un modelo de ajuste de datos para edades posteriores a los ochenta años confrontando con los ya existentes en esa época como las leyes de mortalidad de Gompertz, Makeham, entre otros. Posteriormente su trabajo fue tomado en cuenta como una herramienta importante para que otros grupos de investigadores elaborasen los datos de mortalidad para varios países. Así nació la base de datos conocida como Human Mortality Database (HMD), el cual fue construido en base a la metodología propuesta por los mencionados autores. Años más tarde, utilizando esta base de datos, Vaño Kannisto (2000) desarrolló unos indicadores llamados “índices de compresión de mortalidad” que explican la dinámica de la longevidad. Dicho trabajo ha sido fundamental en las investigaciones de la longevidad para varios países, citando como ejemplo el M-Project (2008). Estas dos investigaciones citadas tienen como propósito: estudiar el comportamiento de la longevidad para algunos países europeos y asiáticos, con el fin de explicar la distribución de probabilidad para la variable aleatoria: instante de fallecimiento; en edades avanzadas. Por consiguiente, el presente trabajo utiliza las investigaciones citadas anteriormente para estudiar la longevidad de la población española. Además aporta una tabla de mortalidad española ajustada en las edades avanzadas, la cual será motivo de comparación con las tablas de mortalidad utilizadas actualmente en la industria aseguradora española. La parte final de este trabajo expone un alcance de la metodología investigada para la población ecuatoriana.

Palabras clave: longevidad, compresión, rectangularización, tablas de mortalidad, modelos de ajuste.

Análisis de discursos sobre dificultades de aprendizaje en Matemáticas: juegos como soporte de intervención

Carlos Eduardo da Silva Ferreira¹

¹*Universidade Estadual Paulista (UNESP), Brasil.*

emails: karloseduardoo@yahoo.com.br

Resumen

Se propone trabajar con un abordaje del Análisis de discursos (AD), campo de discusiones lingüístico-filosóficas, atribuyendo un enfoque en las cuestiones de aprendizaje en Matemáticas. Abordaremos el discurso sobre dificultades en el aprendizaje en Matemáticas por medio de las historietas retiradas del ambiente mediático del Facebook. Tomamos como base que el entendimiento de los estudios en matemáticas no es aislado, por lo contrario, es la discusión interdiscursiva que hará que los sujetos aprendientes se constituirán, en caminos de posibilidades entre muchos otros caminos entrecruzados. Utilizamos reflexiones sobre el concepto de ideología dentro del campo teórico-metodológico del AD francesa, con base en reflexiones expuestas en Althusser, Pêcheux y Foucault. Además de estos autores, tomamos el círculo bakhtiniano para reflexionar los conceptos de movimentación y resignificación por los/de los sujetos en las esferas sociales o espacios sociales. Como Rosário Gregolin (2006, p. 26) nos muestra: "El analista de discursos debe describir las conexiones, los juegos de fuerza, las estrategias discursivas que materializan, en un cierto momento histórico, efectos de sentidos que estén circulando en un espacio social (traducción mía)".

Son por estas análisis de producciones de historietas (imágenes) de publicaciones vehiculadas a la red social de Facebook, con efectos humorísticos, situadas al contexto das vivencias escolares, que tenemos como finalidad reflexionar sobre la noción de inserción de los sujetos-estudiantes en el discurso escolar. Entiendo, así, que analizar discursos es perseguir pistas, rastros que la historia inscribe en los enunciados (verbales o no), en que los sujetos que enuncian pertenecen a lugares sociales y que las relaciones entre las estructuras materiales del lenguaje y los valores de una sociedad son marcados por quien dice/escribe algo. Los discursos son resonancias, como en una forma de impregnación de verdades, o construcciones de posibles sentidos.

Palabras clave: Análisis de Discursos. Educación Matemática. Dificultades en matemática. Juegos matemáticos.

Panel: Hacia una educación matemática crítica

CLAVEMAT¹

¹*Escuela Politécnica Nacional, Quito, Ecuador.*

web: www.clavemat.org

Resumen

Desde finales de la década de los años 80 del siglo pasado, Ole Skovsmose, autor del libro *An Invitation to Critical Mathematics Education*, Sense Publishers (2011), ha contribuido con profundas y valiosas reflexiones sobre cómo la matemática y la educación matemática juegan un papel de exclusión social, y cómo las educadoras y educadores deberían enfrentar esta situación. Según Skovsmose, la educación matemática crítica considera a los significados y razonamientos matemáticos como productos que surgen, no de un proceso mental localizado en alguna parte de la cabeza de las y los estudiantes, sino a partir y dentro del encuentro de seres humanos históricamente anclados. La educación matemática crítica concibe a la alfabetización matemática como una competencia similar a la de la alfabetización descrita por Freire. Esta alfabetización matemática no solo se refiere a unas destrezas matemáticas, sino también a la competencia para interpretar y actuar en una situación social y política que ha sido estructurada por las matemáticas. Por otro lado,

...la educación matemática crítica se preocupa por el desarrollo de una educación matemática que sustente la democracia, lo cual quiere decir que la micro-sociedad del salón de clase de matemáticas debe encarnar aspectos democráticos. La educación matemática crítica recalca el hecho de que las matemáticas no son simplemente una materia que debe enseñarse y aprenderse, sin importar si los procesos de aprendizaje se organizan de acuerdo con los principios de los enfoques constructivistas o socioculturales del aprendizaje. Construir una crítica a las matemáticas como parte de la educación matemática es una preocupación central de la educación matemática crítica. Los proyectos que buscan mejorar la educación matemática y posibilitar un mayor acceso a los conocimientos y saberes matemáticos podrían ser enriquecidos y reformulados a la luz de la educación matemática crítica. Sin embargo, es necesario abrir espacios de reflexión en torno a esta corriente teórica-filosófica que nos permita entender, discernir y debatir sus posibilidades de aplicación práctica.

Por ello, en el marco del XIV Encuentro de Matemática y sus aplicaciones, CLAVEMAT ha considerado oportuno organizar un panel sobre educación matemática crítica que aborde los siguientes interrogantes:

- ¿Cuáles son los antecedentes teóricos de la educación matemática crítica?
- ¿Qué propone la educación matemática crítica?
- ¿Cómo aplicar los preceptos de la educación matemática crítica en el aula?
- ¿Qué perspectivas de trabajo podemos desarrollar como CLAVEMAT a la luz de la educación matemática crítica?

Análisis mediante agentes de juegos de epidemias

Galo Izquierdo¹, Paulina Morillo¹, Carlos Jimenez¹

¹*Universidad San Francisco de Quito, USFQ.*

emails:

galo_imat_izq@yahoo.com, pymo2504@gmail.com, carlosjimenezmosquera@gmail.com

Resumen

Para analizar adecuadamente los efectos de una epidemia, es necesario considerar además de las medidas estratégicas de protección las decisiones que cada individuo toma frente a las opciones presentadas. Estas decisiones, juegan un papel muy importante en la evolución de la epidemia y afecta directamente al rendimiento total del sistema.

Bajo este entorno complicado, la estrategia de una persona suele ser resultado de un compromiso entre coste y riesgo.

Este trabajo propone un modelo de juego de epidemia evolutiva para estudiar los efectos de la autoprotección (toda medida de protección contra la enfermedad que no implique vacuna o tratamiento) en la rentabilidad del sistema y el tamaño de la epidemia.

Además de analizar la reacción a los brotes de enfermedades infecciosas, ya que el conocimiento suficiente sobre las habilidades de auto-protección contra la enfermedad infecciosa, que suenan muy útiles para cada individuo, pueden eventualmente aumentar el tamaño de la epidemia y causar pérdidas para la sociedad.

Resolución numérica de problemas de optimización dispersos mediante algoritmos de segundo orden

Estefanía Loayza¹

¹*Facultad de Ciencias, ModeMat, Escuela Politécnica Nacional, Quito, Ecuador.*

emails: estefania.loayza@epn.edu.ec

Resumen

En esta charla presentamos un nuevo algoritmo de búsqueda lineal para resolver problemas de optimización dispersos (sparse), cluya principal característica es la presencia en el funcional de costo de un término de penalización en norma ℓ^1 (no diferenciable). Este tipo de problemas son interesantes debido a la gran cantidad de aplicaciones en tics: estrategias de aprendizaje de máquinas, reconocimiento de patrones, tratamiento de imágenes, entre otras; y más recientemente en problemas de control óptimo. La principal característica del algoritmo presentado es la utilización de la información de segundo orden asociada a la norma ℓ^1 para el cálculo de las direcciones de descenso. Aunque parezca poco natural la consideración de información de segundo orden de una función no-diferenciable, ésta se la puede incorporar a través de un proceso de regularización del término no diferenciable. La eficiencia del algoritmo presentado en esta charla se mostrará a través de experimentos numéricos, enfocados principalmente a la resolución de problemas de control óptimo.

La optimización como herramienta para el control de transmisión de la borreliosis en la naturaleza

Pedro Merino¹, Joan Ponce¹

¹*Facultad de Ciencias, ModeMat, Escuela Politécnica Nacional, Quito, Ecuador.*

emails: pedro.merino@epn.edu.ec

Resumen

La Borreliosis es causada por la bacteria *Borrelia Burgdorferi*, enfermedad que afecta a los humanos, y que es transmitida por una especie particular de garrapata. Utilizamos la teoría de control óptimo para el ciclo de la Borreliosis en la naturaleza, la cual involucra tres poblaciones: venados, ratones y garrapatas. En esta charla explicaremos el proceso de la modelización, las herramientas matemáticas utilizadas para formular el problema, en particular el control óptimo gobernado por un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias que toma en cuenta compartimentos con individuos susceptibles e infectados de cada especie, siendo el objetivo la reducción de la población de garrapatas infectadas y la reducción del costo de implementación de la medida de control. Finalmente, discutiremos los resultados de las simulaciones numéricas obtenidas.

Morfología Matemática definida en Espacios Color: una teoría para el procesamiento de imágenes

Juan Ignacio Pastore¹

¹*Universidad Nacional de Mar del Plata, Argentina.*

emails: juan.pastore@gmail.com

Resumen

Existen diferentes formas de representar y modelar operadores de imágenes, dentro de las técnicas no lineales, una de gran crecimiento en los últimos años es la Morfología Matemática (MM). Esta metodología, creada para caracterizar propiedades físicas y estructurales de diversos materiales, está basada en conceptos de geometría, álgebra, topología y teoría de conjuntos. Un aspecto central de la MM es la descomposición de cualquier operador en una combinación de cuatro operadores básicos: erosión, dilatación, anti-erosión y anti-dilatación, más las operaciones de supremo e ínfimo. Estos operadores fueron definidos inicialmente para imágenes binarias e inmediatamente se extendieron a imágenes en niveles de gris. Esta extensión se realizó en forma natural dado que en ambos conjuntos existe una relación de orden, la inclusión en el caso de imágenes binarias, y la relación de orden heredada del conjunto de los números reales para las imágenes en niveles de gris. Sin embargo no existe en la actualidad una extensión general para definir los operadores básicos en el dominio de imágenes color debido a la naturaleza vectorial de los datos y la no existencia de un orden natural para datos multidimensionales. Esta conferencia se centrará en el desarrollo de fundamentos matemáticos teóricos con el fin de extender los operadores morfológicos a imágenes color y su posterior aplicación en el procesamiento de imágenes.

Métodos de optimización para la segmentación numérica de imágenes usando el modelo de Chan-Vese

Evelyn Cueva¹

¹*Facultad de Ciencias, ModeMat, Escuela Politécnica Nacional, Quito, Ecuador.*

emails: evelyn.cuevaj@epn.edu.ec

Resumen

La segmentación de imágenes es uno de los problemas más complejos dentro del procesamiento de imágenes y consiste en dividir el dominio de una imagen en subconjuntos donde cada uno corresponda a un objeto que la constituye. Durante los últimos años se ha propuesto una gran variedad de modelos de segmentación vinculados a diferentes áreas de la matemática. En nuestro caso, nos enfocamos en la formulación variacional del problema propuesta por Mumford y Shah y que ha sido extendida por Chan y Vese. El modelo se plantea utilizando métodos de conjuntos de nivel y las ecuaciones de Euler-Lagrange con el objetivo de minimizar el funcional de energía asociado al problema de partición de dominio. El método consiste, básicamente, en la evolución de una curva de nivel que, bajo ciertos criterios, se detiene en el contorno de los objetos que forman la imagen. Resolver numéricamente este problema es, en general, muy costoso. La utilización de métodos de optimización numérica permite dar solución a este inconveniente y garantiza la convergencia de la solución hacia un mínimo global. Se analizan métodos de descenso tales como: el método del gradiente y métodos cuasi-Newton que permiten hacer uso de la información de primer y segundo orden, respectivamente.

Learning optimal spatially-dependent regularization parameters in Total Variation image restoration with Schwarz domain decomposition method

Cao Van Chung¹

¹*Facultad de Ciencias, ModeMat, Escuela Politécnica Nacional, Quito, Ecuador.*

emails: cao.vanchung@epn.edu.ec

Abstract

In this article, we consider the problem of choosing spatially dependent regularization parameters in TV models as a bilevel nonlinear PDE-constrained optimization problem. Based on a first order optimality condition, we propose a combined Schwarz domain decomposition-semismooth Newton method for the solution of the problem in cases where the spatially-dependent parameter belongs to the space $H^1(\Omega)$. Convergence of a globalized semismooth Newton method is proved with a second order information. We also carry out some exhaustive numerical computations to show the suitability of the approach.

Análisis de datos climatológicos del valles de los Chillos usando análisis de datos funcional

Ramiro Guerrón¹, Carlos José Jiménez Mosquera¹

¹Universidad San Francisco de Quito, USFQ.

emails: cjimenez@usfq.edu.ec

Resumen

Análisis de datos con funciones (ADF) es una área de la estadística que busca estimar y hacer inferencias sobre funciones, como tal tiene mucho que ver con análisis de datos multivariados si es que consideramos las funciones como objetos multivariados en muchas dimensiones. La distinción básica entre análisis multivariado y ADF es que en ADF hay un orden intrínscico en las observaciones. Debido a que actualmente es posible obtener una gran cantidad de datos de un fenómeno, ajustar funciones es una realidad, incluso si las funciones dependen del tiempo. La Estación Meteorológica del Instituto Agropecuario Superior Andino IASA, ha recolectado una gran variedad de datos climatológicos del Valle de los Chillos. En el presente estudio se usarán datos desde enero de 1998 a diciembre del 2013. Usando estos datos se busca modelar el comportamiento climatológico del Valles de los Chillos de una forma funcional. Para el análisis se usan varios lenguajes de distribución libre como son R y Python junto con librerías correspondientes, en especial con énfasis en el uso de librerías `fda` y `fda.usc`. Su desarrollo se basará en el análisis exploratorio de datos funcionales, la construcción de objetos de datos funcionales, la descripción de datos funcionales y el análisis de componentes principales funcionales, además se muestra la implementación de los análisis desde un punto de vista multinivel. Con esto se pretende describir, analizar, comprender y explicar todo lo referente a las variables tratadas y permitir que éste estudio se pueda implementar en otras estaciones meteorológicas. Además con éste modelo se pretende predecir con mayor certeza el comportamiento de las variables estudiadas y pueda ser usado para establecer fechas de siembras, de riego, cosecha, etc.

Análisis Comparativo de Ajuste en Entrenamiento de Redes Neuronales Artificiales a partir de las Librerías Open NN y ALGLIB

Erith Muñoz¹

¹*Instituto Espacial Ecuatoriano, IEE.*

emails: erith7@gmail.com

Resumen

En las últimas décadas son muchos los avances que han tenido lugar en el desarrollo de aplicaciones y alcances de las redes neuronales artificiales, y de igual modo el desarrollo tecnológico en el área de la computación. Este tipo de avances han incidido directamente en el número de publicaciones de aplicaciones, en diversas áreas del conocimiento, basadas en este método de inteligencia artificial. Ahora bien, hasta el presente sigue siendo tema de discusión la idoneidad y aplicabilidad de herramientas de software libre para facilitar la implementación y la calidad de resultados. En este contexto, este trabajo representa un análisis comparativo de aplicaciones usando las librerías ALGLIB y Open NN, orientadas al entrenamiento y reproducción de redes neuronales artificiales. De igual modo, se establece una evaluación de los resultados obtenidos a partir de los niveles de correlación entre la salida de valores para redes entrenadas y un conjunto de datos de entrenamiento simulados.

Palabras clave: Redes Neuronales Artificiales, ALGLIB, Open NN, Algoritmo Quasi-Newton.

Evaluación del desempeño del algoritmo YYC de búsqueda de testores

Felipe Vaca¹, Julio Ibarra¹

¹*Colegio de Ciencias e Ingeniería, Universidad San Francisco de Quito, USFQ.*

emails: felipevacar@gmail.com, julioi@usfq.edu.ec

Resumen

Los trabajos en reconocimiento de patrones usando modelos lógico combinatorios, recalcan la utilidad de los testores típicos en la selección de variables para problemas de clasificación supervisada y al mismo tiempo señala que el cálculo de dichos testores es costoso en términos computacionales, por ende, el tiempo de ejecución de los algoritmos correspondientes es elevado. Experimentos realizados por los autores han demostrado que de entre las herramientas existentes, el algoritmo YYC es el más eficiente en términos de tiempo de ejecución. En este sentido, el presente documento propone dos implementaciones de éste (imperativo y funcional) y evalúa los resultados correspondientes.

Sobolev-like cones of trace-class operators on unbounded domains: interpolation inequalities and compactness properties

J. Mayorga^{1,2}, Z. Salinas³

¹Universidad Estatal de Milagro, Ecuador.

²Universidad Tecnológica Israel, Ecuador.

³Escuela Politécnica Nacional, Quito, Ecuador.

emails: mayorgaz@yahoo.com, zulysalinas@gmail.com

Abstract

In this paper we extend the compactness properties for trace-class operators obtained by Dolbeault, Felmer & Mayorga-Zambrano to a smooth unbounded domain $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ $d \geq 3$. We consider V , a non-negative potential on Ω that blows up at infinity, and the normed space $H_V(\Omega) = \left\{ u \in H_0^1(\Omega) : \|u\|_V^2 = \int_{\Omega} (|\nabla u(x)|^2 + |u(x)|^2 V(x)) dx < \infty \right\}$. A positive self-adjoint trace-class operator R belongs to the Sobolev-like cone $\mathcal{H}_{V,+}^1$ if $(\psi_{i,R})_{i \in \mathbb{N}} \subseteq H_V(\Omega)$ and $\langle\langle R \rangle\rangle_V = \sum_{i=1}^{\infty} V_{i,R} \|\psi_{i,R}\|_V^2 < \infty$, where $(V_{i,R})_{i \in \mathbb{R}}$ is the sequence of occupation numbers of R and $(\psi_{i,R})_{i \in \mathbb{R}} \subseteq L^2(\Omega)$ is a corresponding Hilbertian basis of eigenfunctions. We prove that a sequence in $\mathcal{H}_{V,+}^1$ bounded in energy $\langle\langle \cdot \rangle\rangle_V$, has a subsequence that converges in trace norm; this is analogous to the classical Sobolev immersion $H^1(\Omega) \subseteq L^2(\Omega)$. We prove the existence of lower bounds for non-linear free energy functionals and, by doing so, we establish Lieb-Thirring type inequalities as well some Gagliardo-Nirenberg type interpolation inequalities; then our compactness result is applied to minimize non-linear free energy functionals working on $\mathcal{H}_{V,+}^1$.

Key words: Compactness; trace-class operator; Schrödinger operator; free energy. 2010 MSC: 81Q10, 82B10, 26D15, 35J10, 35P10, 47B34

Nuevas técnicas estadísticas para nuevos datos

Salvador Naya¹

¹*Universidad da Coruña, España.*

emails: salva@udc.es

Resumen

Se propone hacer una exposición de algunas técnicas estadísticas de reciente aparición, como los datos funcionales, la minería de datos, la estadística espacial, la clasificación supervisada o el control de calidad mediante imágenes. El objetivo es hacer una reflexión acerca del papel de la matemática en sus relaciones con la industria y con los problemas reales en los momentos actuales. Para ello se presentarán algunos “casos de éxito” recientes en los que se el autor ha colaborado de forma directa con empresas que planteaban problemas de índole matemática y cuyos datos no se ajustan a los modelos clásicos. En los últimos años, ha habido una enorme expansión en la aplicación de métodos matemáticos al campo industrial, surgiendo varios proyectos que tratan de unir el mundo matemático con las aplicaciones directas a problemas industriales. Un buen ejemplo de ello son la creación de distintos títulos de master y doctorado en matemática industrial o la creación de nodos de investigación, como el nodo de matemática industrial, math-in, o más recientemente la creación del Instituto de Matemática Industrial, IMATI. Una clase especial de ésta interacción, que se encuentra en pleno proceso de expansión y que recientemente ha llamado la atención de muchas empresas, son las aplicaciones de la denominada estadística industrial. Concretamente en este trabajo se presentarán algunos ejemplos de aplicación a nuevos datos, como los estudios con Smart materiales o el tratamiento de imágenes que proponen nuevos e interesantes retos para el empleo de nuevas técnicas estadísticas.

Functional Data Analysis in Statistical Process Control

Miguel A. Flores¹, Salvador Naya², Javier Tarrío-Saavedra³

¹*Facultad de Ciencias, ModeMat, Escuela Politécnica Nacional, Quito, Ecuador.*

²*Escola Politécnica Superior, España*

³*Universidade da Coruña, Ferrol, España*

emails: miguel.flores@epn.edu.ec, salva@udc.es, jtarrio@udc.es

Resumen

El presente trabajo genera y desarrolla aportaciones al control estadístico de calidad (CEC) según dos vertientes diferenciadas: por un lado, programación de herramientas informáticas y, por otro, elaboración, adaptación y puesta en marcha de metodologías de utilidad en CEC.

Se busca ofrecer a la comunidad científica y usuarios en general una aplicación informática que permita un tratamiento sencillo y eficaz de los gráficos de control de calidad por variables y atributos para el desarrollo de programas control estadístico de procesos. Para esto se ha creado y desarrollado una nueva librería dentro del software estadístico R, quality control and reliability (qcr).

Este paquete ofrece al usuario una alternativa competitiva frente a otros ya existentes como qcc, sixsigma, qualitytools, etc. que no incorporan herramientas tales como gráficos de control estadístico más novedosos y que hasta el momento no habían sido desarrollado, como es el caso de los gráficos de control para datos funcionales que utilizan el concepto de profundidad de datos.

Simulación de un sistema de transporte público considerando aglomeramientos, retrasos e irregularidades en el servicio

Alejandro Ayala¹

¹*Escuela Politécnica Nacional, Quito, Ecuador.*

emails: alejo.ayalab@gmail.com

Resumen

Hoy en día el tráfico vehicular constituye uno de los problemas de gran importancia dentro de las grandes ciudades alrededor del mundo, situación que se agrava al no contar con un sistema óptimo de transporte que cubra las necesidades de transportación de las personas en forma rápida, cómoda y segura. En el presente trabajo se aborda esta problemática para la ciudad de Quito desde la perspectiva de la simulación, bajo el objetivo de mejorar las condiciones actuales y obtener un sistema de transporte público óptimo que permita movilizar a los usuarios en el menor tiempo posible con estándares de calidad.

Se plantea un modelo de simulación de transporte público con aplicación al sistema Trolébus considerando aglomeramientos, retrasos e irregularidades en el servicio. La implementación computacional se realizó en el programa estadístico RStudio asumiendo datos reales del funcionamiento del sistema y considerando variaciones en el comportamiento de la demanda, la capacidad vehicular y cambios en el diagrama de marcha. De igual forma se realiza un análisis de los tiempos de viaje promedios que se realizan durante un día de servicio, incluyendo factores externos como semáforos, opciones de paso, etc.

Aprendizaje de variedades y mapas de difusión

Carlos José Jiménez-Mosquera ¹

¹*Universidad San Francisco de Quito.*

emails: `cjimenez@usfq.edu.ec`

Resumen

Cada vez es más común tener que analizar datos con un volumen muy grande, por ejemplo en astronomía la cantidad de la cantidad de datos actual es como 1 PB (pentabyte) y aumenta a razón de 0.5 PB anualmente, datos de redes sociales, meterología, genómica tienen un tamaño de un orden similar. Comprender estos datos es muy difícil porque además del volumen los datos tienen una dimensionalidad p muy grande. Métodos para reducir la dimensionalidad a tamaños que puedan ser visualizados se refieren a reducción de la dimensionalidad.

Tradicionalmente el método preferido para reducir la dimensión de los datos es componentes principales, ACP. Sin embargo este método tiene problemas si los datos están en una variedad $\mathcal{M} \in \mathbb{R}^2$ que no se puede describir bien por un subespacio vectorial de \mathbb{R}^n . Principalmente la comunidad de investigadores en aprendizaje de máquinas han buscado métodos para obtener la variedad \mathcal{M} , aprendizaje de variedades ó reducción no lineal de la dimensionalidad. Algunos de los métodos propuestos son mapas auto-organizados, curvas principales, componentes principales con núcleo, inclusiones locales no lineales, valores propios del Laplaciano, mapas de difusión, treelets y muchos otros.

En este trabajo presentamos una comparación de componentes principales con núcleo, mapas de difusión y treelets para el aprendizaje de varias variedades usando python y R, así como implementación en python de estos algoritmos.

Pointwise estimates for nonnegative solutions to a class of degenerate/singular parabolic equations

Vincenzo Vespri¹

¹*Dipartimento di Matematica ed Informatica Ulisse Dini, Università degli Studi di Firenze.*

emails: `vincenzo.vespri@unifi.it`

Abstract

Let us consider the following homogeneous quasilinear parabolic equations whose prototypes are the p -Laplacian ($\frac{2N}{N+1} < p < \infty$) and the Porous medium equation ($(\frac{N-2}{N})_+ < m < \infty$).

$$u_t = \operatorname{div} A(x, t, u, Du), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^N \times [0, +\infty), \quad (1)$$

where the functions $A := (A_1, \dots, A_N)$ are assumed to be only measurable in $(x, t) \in \mathbb{R}^N \times [0, +\infty)$, continuous with respect to u and Du for almost all (x, t) .

By using recent results obtained in collaboration with Bögelein, Calahorrano, Düzgün, Fino, Piro Vernier and Ragnedda we are able to give some pointwise estimates from above and from below starting from the value of the solution attained in a point. We apply these results to give sharp estimates to the fundamental solution of such class of equations



Mode
Mat

