

LIBROS Y CUADERNOS DE MATEMÁTICA  
DE LA ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

HOLGER CAPA SANTOS

---

---

SERIES TEMPORALES

*La ciencia y el arte de la modelación y los pronósticos*

---

---



## **Libro de Matemática No. 14**

**SERIES TEMPORALES: LA CIENCIA Y EL ARTE DE LA MODELACIÓN Y LOS PRONÓSTICOS**

**HOLGER CAPA SANTOS**

**Responsable de la Edición:** Sandra Gutiérrez

**Corrección de estilo:** Sebastián Laverde

**Asistente de Edición:** Edwin Quizhpi

**Transcripción a LATEX:** Diego Huaraca, Diego Morales

Registro de derecho autoral No.

ISBN: 978-9978-383-36-0

Publicado por la Unidad de Publicaciones de la Facultad de Ciencias de la Escuela Politécnica Nacional, Ladrón de Guevara E11-253, Quito, Ecuador.

Primera edición: 2016

Primera impresión: 2016

© Escuela Politécnica Nacional 2016

*A mis padres, Julio y Almida, por su sacrificio inmenso  
y su gran amor, que me han permitido  
alcanzar mis grandes sueños e ideales.*

*A mis hijos: Brithany, Sebastián y Mathías, por su cariño  
y comprensión; a ellos les debo la energía  
e ilusión para la elaboración de mis obras,  
aunque he debido frecuentemente  
sacrificar su compañía.*

# Prólogo

No conozco un profesional mejor capacitado para abordar el enredado tema de las series temporales, que el Dr. Holger Capa Santos. Digo que es un tema enredado por la complejidad intrínseca del mismo y por las diversas ramificaciones que tiene. Por un lado, se sustenta en las sólidas bases de la teoría de probabilidades y la estadística matemática, que no son de conocimiento y alcance de un público muy numeroso, incluso entre aquellos que practican el arte de predecir el futuro usando series temporales. Por otro, debe responder a las necesidades concretas de economistas, hombres de negocios, politólogos, meteorólogos, etc., para quienes las series temporales son herramientas que les ayudan a tomar decisiones y de las cuales, por tanto, esperan soluciones a problemas prácticos y concretos que se representan en datos de características específicas. Para ellos, la utilidad de las series temporales se mide en ganancias o pérdidas contantes y sonantes, decisiones bien o mal tomadas, predicciones que resultaron útiles o no.

A la hora de enseñar Series de tiempo y de formar profesionales en esta área, esta situación acarrea dos peligros: por un lado, los teóricos con una fuerte formación matemática corren el riesgo de perderse en disquisiciones relevantes sólo para un reducido grupo de especialistas, pero sin aportar a la solución de los problemas del mundo real. En cambio, un curso con demandantes requisitos teóricos sería imposible de abordar para la gran mayoría de economistas, sociólogos, etc. que usan este aparataje instrumental. Por otro lado, cursos demasiado orientados a la práctica terminan convirtiéndose en recetarios de “reglas del dedo pulgar” de gran operatividad pero de dudosa validez teórica, que tarde o temprano se convierten en crasos errores de aplicación, cuando esta reglas se usan para situaciones que no cumplen con los requerimientos teóricos necesarios.

Es por eso que este libro es tan relevante. El Dr. Capa tiene una amplia trayectoria como estadístico de profunda formación teórica, quien ha enseñado –tanto a nivel de grado, como de posgrado- cursos que van desde el análisis funcional a los métodos numéricos, desde la teoría de probabilidades hasta la gerencia de mercadeo, desde la Ingeniería de la calidad hasta evaluación de impacto en programas sociales. En estas áreas el Dr. Capa no sólo ha ejercido la docencia, sino también la investigación, tal como lo evidencia la larga lista de publicaciones académicas y ponencias en seminarios científicos. A esto se une su amplísima experiencia profesional, que incluye consultorías en sectores como el energético, de telecomunicaciones, educativo, etc., estudios actuariales y experiencia administrativa como Director Regional en el Instituto Nacional de Estadística y Censos del Ecuador. Este libro, tanto en la selección de los temas, como en su presentación, representa la conjunción entre la aplicación práctica y la profundidad teórica que nace de la experiencia y formación que

en ambos campos tiene su autor. Aquí están los ejemplos prácticos, y también los teoremas.

Así, las herramientas estadísticas más importantes se desarrollan en este libro hasta un nivel avanzado. Por ejemplo, la cointegración, de aplicación amplia en macroeconomía y en el estudio de su dinámica. Los vectores autoregresivos, claves para predicción e inferencia en el estudio de los ciclos económicos y en evaluación de choques externos y medidas de política, incluyendo la causalidad de Granger. No se encuentran desarrollados, pues el libro no tiene objetivo enciclopédico, aplicaciones de la descomposición espectral de series temporales, que han demostrado ser muy útiles en el análisis de estacionalidades y ciclos económicos, aunque si se han considerado los elementos básicos que permiten justificar la utilización en los procesos ARMA de los teoremas más importantes para las aplicaciones estadísticas: La Ley de los grandes números y el Teorema central de límite. Cabe mencionar que incluso estos enfoques están siendo superados en cuanto a aplicaciones económicas, puesto que en esta realidad los ciclos no son regulares y de periodicidad constante, por lo que proyecciones de las series en el espacio de las ondelettes se ajustan mejor y ofrecen mejores resultados, tanto en predicciones como en interpretación. Como buena base para el estudio de estos temas, en el presente libro se encuentran los fundamentos teóricos de la descomposición espectral de series estacionarias.

Las series temporales son y seguirán siendo un caballo de batalla muy importante para los científicos sociales, especialmente economistas. Contar con un libro como este, que cubre los principales temas desde sus bases teóricas hasta su aplicación, permite también pensar en los desafíos futuros. Estos desafíos provienen de tres elementos nuevos en las ciencias sociales: el acceso a inmensas cantidades de información social; capacidad de computación antes inimaginable y ahora accesible desde la nube o en servidores propios; y, finalmente, nuevas formas de análisis y visualización de datos primarios y resultados. El primer elemento está presente en nuestras vidas diarias: dejamos una huella permanente de nuestros movimientos con nuestros dispositivos móviles, de nuestras redes sociales en llamadas telefónicas, Facebook, correos electrónicos, de nuestras preferencias como consumidores con nuestra tarjeta de crédito; sensores recogen información sobre clima, tránsito, movimiento de mercancías; se acumulan terabytes con información de transacciones comerciales entre empresas, de transacciones financieras, etc., etc. Todo esto hace posible la existencia de bases de datos de altísima resolución, que se actualizan en tiempo real, relacionales por naturaleza y de mucha flexibilidad, que requieren de tratamiento distinto al que se da a los datos escasos, estáticos, de poca oportunidad, agregados y poco relacionados, disponibles en el pasado. No solo los métodos deben ser diferentes, los fundamentos del enfoque científico en ciencias sociales deben cambiar, dando paso a un enfoque más exploratorio, mucho más empírico y basado en simulaciones del sistema complejo que es el sistema social. Por ahora, la inmensa cantidad de datos y poder de computación se aprovechan con métodos que permiten encontrar correlaciones útiles en márketing y poco más; pero preguntas fundamentales referentes, por ejemplo, al diseño institucional, manejo macroeconómico, o el subdesarrollo económico, también deben beneficiarse de datos, capacidad de computación y posibilidad de comunicar supuestos, teorías y modelos en formas diferentes al terrorismo verbal. Las tareas a resolver son grandes: se requerirán teorías y metodologías para integrar datos provenientes de diferentes fuentes, coberturas, periodicidades y confiabilidad; habrá que buscar teorías y métodos que permitan caracterizar el sistema complejo subyacente en base a la traza de datos que origina; y se deberán crear las interfaces gráficas que conviertan

a estos modelos en espacios de diálogo social, no exclusivo para iniciados. Sobre bases como las contenidas en este libro, es posible enfrentar esos desafíos.

Wilson Pérez, Ph.D.  
FACULTAD LATINOAMERICANA DE CIENCIAS  
SOCIALES (FLACSO), SUBSEDE ECUADOR

Quito, febrero 2016.

# Presentación

Este texto intenta constituirse en un primer acercamiento al estudio de las series temporales, campo en el cual, en las últimas décadas, se han realizado avances importantísimos, muy superiores a los que se habían efectuado en los años precedentes; todo esto, posibilitado por el gran desarrollo de la informática y de software altamente tecnificado, necesario para la estimación y predicción de la gran gama de modelos que han ido apareciendo.

El contenido es de carácter general y comprende series univariantes y multivariantes; puede dictarse en un curso semestral a personas con formación cuantitativa (álgebra lineal, cálculo, probabilidades y estadística) e interesados en comprender el desarrollo formal de algunos resultados importantes; sin embargo, las demostraciones de ciertos teoremas y el tratamiento de algunos prerrequisitos algo técnicos se han incluido en anexos. En todo caso, del contenido de cada capítulo el maestro podrá evitar ciertos temas que le parezcan extremadamente abstractos para enfatizar en las aplicaciones prácticas.

Se ha tratado de equilibrar la presentación, buscando que los conceptos fundamentales de este tema sean comprendidos de manera precisa, pero sin descuidar que otro de los objetivos fundamentales en este campo es adquirir la destreza práctica para la modelación. Sin embargo, es saludable recordar que la correcta interpretación de los modelos, siempre está sujeta a un dominio adecuado de la teoría subyacente.

El primer capítulo está dedicado a presentar los principales resultados sobre procesos estacionarios, los que constituyen la base para una comprensión precisa de la formulación de los modelos para series de tiempo. En particular, se trata de mostrar que incluso en procesos tan regulares como estos ya no se dispone de dos teoremas importantísimos de la estadística básica: La Ley de los grandes números y el Teorema central de límite; entonces, el desafío constituye en determinar bajo qué casos todavía son aplicables estos resultados.

En el segundo capítulo se presentan los modelos lineales y, como casos particulares de ellos, los modelos autoregresivos-media móvil (ARMA en la terminología anglosajona); también se introducen los modelos no estacionarios llamados ARIMA, los que se pueden transformar mediante “diferenciación” aproximadamente en modelos ARMA.

El tercer capítulo está dedicado a la estimación, verificación y predicción de series temporales, aplicando la muy conocida metodología de Box y Jenkins; adicionalmente, se muestra el tratamiento de datos transformados y las pruebas de raíces unitarias, muy importantes para dilucidar técnicamente cuándo una serie debería diferenciarse para volverse estacionaria. También se realizan aplicaciones con procesos ARIMA estacionales (SARIMA en la terminología anglosajona).

En el cuarto capítulo se han incluido modelos no lineales, de gran aplicación práctica en los últimos años, especialmente en el ámbito financiero, como son los modelos autoregresivos con heteroscedasticidad condicional generalizados (GARCH) y sus extensiones asimétricas (TARCH, EGARCH, PARCH).

En el quinto capítulo se presentan los modelos de series temporales multivariantes, específicamente los modelos autoregresivos vectoriales (VAR en la terminología anglosajona); también se dan algunas definiciones y aplicaciones de la causalidad, así como del análisis de choques y la descomposición de la varianza.

En el sexto capítulo se realiza una presentación de los conceptos de cointegración cuando los procesos multivariantes ya no son estacionarios. Finalmente, se aborda el modelo más conocido en presencia de cointegración de las variables, denominado modelo de corrección del error (MEC en la terminología anglosajona).

En los últimos años, y esta es una de las razones para el impresionante desarrollo de aplicaciones sobre series temporales, se ha generado una gran cantidad de software en esta área; en este textoto se han utilizado Statgraphics y EViews.

Se han marcado con un asterisco (\*) algunas secciones que pueden evitarse en una primera lectura o que serían aconsejables solamente para personas con una fuerte formación cuantitativa.

El autor espera que este texto logre suplir también la notoria ausencia de libros sobre esta temática en lengua española.

Deseo expresar mi profundo reconocimiento al doctor Wilson Pérez por la realización del prólogo de este texto, así como por algunas sugerencias importantes. También agradezco los amables comentarios de los profesores Pedro Morettín y Marie Kratz para este texto. Han sido también valiosos las sugerencias y comentarios de los profesores de la Escuela Politécnica Nacional: Dr. Luis Horna y MSc. Ernesto Caizaguano.



Para concluir, un agradecimiento a todas las personas que han contribuido a que este proyecto llegue a un final exitoso; en particular, a las autoridades de la Escuela Politécnica Nacional y del Departamento de Matemática, así como a mis estudiantes, de diferentes universidades, que por varios años han soportado una experimentación continua con mis apuntes de clase, así como con mi texto anterior: Un Primer Curso en Series Temporales.

Dr. Holger Capa Santos  
AUTOR  
Quito, enero, 2016

# Índice general

<b>1</b>	<b>Análisis a través de procesos estacionarios</b>	<b>3</b>
1.1	Introducción . . . . .	3
1.2	Procesos estacionarios . . . . .	5
1.3	Representación espectral de un proceso estacionario . . . . .	12
1.3.1	Representación espectral de $(\gamma_t)$ . . . . .	12
1.3.2	Representación espectral de $(X_t)$ . . . . .	14
1.4	Teoremas Límites . . . . .	19
1.4.1	Teorema Central de Límite . . . . .	21
1.5	Predicción de un Proceso Estacionario y Descomposición de Wold . . . . .	22
1.5.1	Predicción de un Proceso Estacionario . . . . .	22
1.5.2	Descomposición de Wold . . . . .	22
	Ejercicios propuestos . . . . .	23
<b>2</b>	<b>Procesos Lineales. Modelos ARMA</b>	<b>27</b>
2.1	Procesos Lineales . . . . .	27
2.2	Procesos Autoregresivos . . . . .	30
2.2.1	El caso del modelo $AR(1)$ . . . . .	30
2.2.2	Unicidad de la descomposición para el caso del $AR(p)$ . . . . .	31
2.2.3	Existencia de un proceso $AR(p)$ . Ecuaciones de Yule-Walker . . . . .	32
2.2.4	Autocorrelación asintótica de un proceso $AR(p)$ . . . . .	35
2.2.5	Autocorrelación parcial de un proceso $AR(p)$ . . . . .	36
2.3	Procesos Medias Móviles . . . . .	42
2.3.1	Autocorrelación de un $MA(q)$ . . . . .	43
2.3.2	Autocorrelación Parcial de un $MA(q)$ . . . . .	44
2.4	Procesos ARMA (Autoregressive – Moving Average) . . . . .	46
2.5	Procesos ARIMA (Autoregressive Integrated Moving Average) . . . . .	49
2.5.1	Diferenciación . . . . .	49
2.5.2	Representación MA de un ARIMA . . . . .	52
2.5.3	Representación AR de un ARIMA: . . . . .	53
	Ejercicios propuestos . . . . .	62
<b>3</b>	<b>Estimación, Verificación y Predicción en un Modelo ARIMA</b>	<b>63</b>
3.1	Metodología Box–Jenkins . . . . .	63
3.2	Identificación <i>a Priori</i> . . . . .	64
3.2.1	Elección de $d$ . . . . .	64
3.2.2	Elección de $p$ y $q$ . . . . .	65

3.3	Estimación de un Modelo ARIMA . . . . .	67
3.3.1	Procedimiento condicional . . . . .	68
3.3.2	Procedimiento no condicional . . . . .	70
3.4	Identificación <i>a posteriori</i> . . . . .	73
3.4.1	Fase de verificación . . . . .	73
3.4.2	Utilización de los residuos estimados para modificar el modelo . . . . .	78
3.4.3	Pruebas de estabilidad . . . . .	79
3.4.4	Elección del modelo . . . . .	81
3.5	Predicción de los modelos ARIMA . . . . .	82
3.5.1	Cálculo de las predicciones lineales óptimas en un modelo ARIMA . . . . .	82
3.5.2	Intervalos de predicción . . . . .	87
3.5.3	Funciones de predicción . . . . .	87
3.5.4	Contraste de la estabilidad estructural en la predicción . . . . .	89
3.6	Aspectos complementarios . . . . .	90
3.6.1	Transformación de datos . . . . .	90
3.6.2	Prueba para raíces unitarias . . . . .	92
3.6.3	Modelos estacionales . . . . .	95
	Ejercicios propuestos . . . . .	105
<b>4</b>	<b>Modelos de Heteroscedasticidad Condicional</b>	<b>109</b>
4.1	Modelos ARCH–GARCH Simétricos . . . . .	109
4.2	Modelos GARCH asimétricos . . . . .	111
4.3	Metodología de la Modelación . . . . .	113
4.4	Ejemplos con heteroscedasticidad condicional . . . . .	114
<b>5</b>	<b>Modelos Multivariantes de Series Temporales</b>	<b>139</b>
5.1	Procesos Estacionarios . . . . .	139
5.1.1	Proceso estrictamente estacionario . . . . .	139
5.1.2	Proceso débilmente estacionario . . . . .	140
5.2	Matrices de Correlación Cruzada ( <i>Cross-Correlation</i> ) . . . . .	140
5.2.1	Dependencia Lineal . . . . .	141
5.3	Modelos de Vectores Autoregresivos (VAR) . . . . .	145
5.3.1	El caso bivariante . . . . .	145
5.3.2	Representación general de un VAR . . . . .	147
5.4	Representación VARMA de una serie multivariante . . . . .	149
5.4.1	La representación VMA . . . . .	149
5.4.2	Representación lineal de un VAR(p) . . . . .	150
5.4.3	La representación VARMA . . . . .	151
5.5	Formulación de un modelo VAR . . . . .	152
5.5.1	Estimación . . . . .	153
5.5.2	Determinación del número de retardos . . . . .	153
5.5.3	Diagnóstico y validación del modelo . . . . .	154
5.6	Predicción . . . . .	157
5.7	La Causalidad . . . . .	171
5.7.1	La causalidad según Granger . . . . .	171
5.7.2	La causalidad según Sims . . . . .	172
5.8	Análisis de los “choques” . . . . .	175

5.9	Descomposición de la varianza . . . . .	180
5.9.1	Representación de errores ortogonales . . . . .	180
5.9.2	Descomposición de la Varianza . . . . .	181
5.9.3	Elección del orden de descomposición . . . . .	181
5.10	Ejemplo práctico . . . . .	185
<b>6</b>	<b>La Cointegración</b> . . . . .	<b>199</b>
6.1	Propiedades del orden de Integración de una serie . . . . .	199
6.2	Condiciones de cointegración . . . . .	201
6.3	Modelo de corrección del error (MCE) . . . . .	204
6.3.1	Planteamiento del MCE . . . . .	204
6.3.2	Prueba de Johansen . . . . .	206
6.3.3	Especificación de tendencias deterministas . . . . .	207
6.4	Prueba de exogeneidad débil . . . . .	230
6.5	Cointegración Estacional . . . . .	233
	<b>Referencias bibliográficas</b> . . . . .	<b>235</b>
6.6	Textos . . . . .	235
6.7	Otras referencias . . . . .	236
<b>A</b>		<b>239</b>
A.1	NOCIONES SOBRE PROCESOS ESTOCÁSTICOS . . . . .	239
A.2	DEMOSTRACIONES DE ALGUNOS TEOREMAS DEL CAPÍTULO 1 . . . . .	240
<b>B</b>		<b>247</b>
B.1	OPERADORES DE RETARDO Y AVANCE . . . . .	247
B.2	ECUACIONES EN DIFERENCIAS . . . . .	249
B.3	DEMOSTRACIONES DE ALGUNOS TEOREMAS . . . . .	252
<b>C</b>		<b>259</b>
C.1	ESTIMACIÓN DE MÁXIMA VEROSIMILITUD NO CONDICIONAL EN UN PROCESO ARMA . . . . .	259
C.2	EVOLUCIÓN DE UN ÍNDICE BURSÁTIL EN 141 DÍAS DE OPERACIÓN EN LA BOLSA DE VALORES . . . . .	263
C.3	DATOS DE VENTAS MENSUALES DE UN PRODUCTO (En miles de dólares) . . . . .	264
<b>D</b>		<b>265</b>
D.1	DATOS MENSUALES DE SERIES ECONÓMICAS DE UN PAÍS SUDAMERICANO Y SUS RETORNOS . . . . .	265
D.2	DATOS DE VARIACIONES DE SERIES ECONÓMICAS DEL ECUADOR . . . . .	267
	<b>Índice Alfabético</b> . . . . .	<b>269</b>

# Índice de figuras

1.1	Ajuste adecuado de datos de tendencia cuadrática por una curva polinomial .	4
1.2	Ajuste no adecuado de una serie de ventas a través de una curva cuadrática .	4
1.3	Modelación de una serie de ventas a través de un modelo SARIMA (se estudiará más adelante) . . . . .	5
1.4	Ruido blanco fuerte simulado con distribución $N(0, 1)$ . . . . .	7
1.5	Proceso estacionario . . . . .	9
1.6	Proceso no estacionario: Tendencia creciente . . . . .	10
1.7	Proceso no estacionario: Varianza no homogénea . . . . .	10
1.8	Proceso no estacionario: Tendencia decreciente y varianza no homogénea . .	11
2.1	Modelo simulado $AR(2)$ . . . . .	38
2.2	Comportamiento de $\rho(\ell)$ . . . . .	38
2.3	Comportamiento de $r(\ell)$ . . . . .	39
2.4	Modelo $MA(1)$ . . . . .	45
2.5	Comportamiento de $\rho(\ell)$ . . . . .	45
2.6	Comportamiento asintótico de $r(\ell)$ . . . . .	46
2.7	Modelo $ARMA(1, 1)$ . . . . .	47
2.8	Comportamiento de $\rho(\ell)$ . . . . .	48
2.9	Comportamiento de $r(\ell)$ . . . . .	48
2.10	Efecto de la diferenciación en una tendencia lineal . . . . .	50
2.11	Efecto de la diferenciación de una tendencia cuadrática . . . . .	50
2.12	Efecto de la diferenciación de una tendencia exponencial . . . . .	51
2.13	Efecto de la transformación logarítmica en una tendencia exponencial . . . .	51
3.1	Serie de un Índice Bursátil (SIB) . . . . .	64
3.2	Función de autocorrelación de la SIB . . . . .	65
3.3	Serie estacionaria obtenida a partir de la SIB . . . . .	65
3.4	FAC estimada del modelo $ARIMA(0, 1, 0)$ , para la SIB . . . . .	67
3.5	FACP estimada del modelo $ARIMA(0, 1, 0)$ , para la SIB en primera diferencia	67
3.6	FAC residual estimada del Modelo $ARIMA(2, 1, 2)$ de la SIB . . . . .	76
3.7	FACP residual estimada del Modelo $ARIMA(2, 1, 2)$ de la SIB . . . . .	76
3.8	FAC residual estimada del Modelo $ARIMA(2, 1, 1)$ de la SIB . . . . .	77
3.9	FACP residual estimada del Modelo $ARIMA(2, 1, 1)$ de la SIB . . . . .	77
3.10	FAC residual estimada del Modelo $ARIMA(1, 1, 1)$ de la SIB . . . . .	77
3.11	FACP residual estimada del Modelo $ARIMA(1, 1, 1)$ de la SIB . . . . .	77

3.12	FAC y FACP residuales estimadas del Modelo $ARIMA(1,1,1)$ de la SIB en EViews . . . . .	78
3.13	Prueba de Chow para el punto de quiebre. . . . .	80
3.14	Prueba de predicciones de Chow . . . . .	89
3.15	Grafico de SVM . . . . .	97
3.16	FAC y FACP estimadas de SVM . . . . .	98
3.17	FAC Y FACP estimadas de la SVM con una diferencia estacional . . . . .	99
3.18	FAC y FACP residuales estimadas del Modelo 2 para SVM . . . . .	101
3.19	FAC y FACP estimadas del Modelo 3 para la SVM . . . . .	103
3.20	Comparación de predicciones con valores reales (2015) . . . . .	104
4.1	FAC y FACP estimadas residuales del Modelo 4 para la SVM . . . . .	115
4.2	FAC y FACP estimadas de los residuos cuadráticos del Modelo 4 para la SVM . . . . .	116
4.3	FAC y FACP estimadas residuales del Modelo 5-ARCH(1) para la SVM . . . . .	118
4.4	FAC y FACP estimadas de los residuos cuadráticos del Modelo 5-ARCH(1) para la SVM . . . . .	118
4.5	FAC y FACP estimadas residuales del Modelo 6-ARCH(1) para la SVM . . . . .	120
4.6	FAC y FACP estimadas de los residuos cuadráticos . . . . .	121
4.7	Evolución de la varianza de la SVM según el Modelo 6-ARCH(1) . . . . .	121
4.8	Serie de los precios de cierre del índice S&P 500 . . . . .	122
4.9	Serie de las rentabilidades de los precios de cierre del índice S&P 500 . . . . .	123
4.10	FAC y FACP estimadas de $r_t$ . . . . .	124
4.11	FAC y FACP estimadas del Modelo 1 para $r_t$ . . . . .	125
4.12	FAC y FACP estimadas del Modelo 2 para $r_t$ . . . . .	126
4.13	FAC y FACP estimadas del Modelo 3 para $r_t$ . . . . .	128
4.14	FAC y FACP estimadas del Modelo 4 para $r_t$ . . . . .	129
4.15	FAC y FACP estimadas del Modelo 5 para $r_t$ . . . . .	131
4.16	FAC y FACP de los residuos estandarizados al cuadrado estimados del Modelo 5 para $r_t$ . . . . .	132
4.17	FAC y FACP de los residuos al cuadrado estimadas del Modelo 5-EGARCH(1,0) para $r_t$ . . . . .	134
4.18	FAC y FACP de los residuos estandarizados al cuadrado estimados del Modelo 7 para $r_t$ . . . . .	136
4.19	FAC y FACP de los residuos al cuadrado estimadas del Modelo 7 para $r_t$ . . . . .	137
4.20	Ajuste de la varianza de $r_t$ a partir del Modelo 7 (período analizado) . . . . .	138
4.21	Predicción de la varianza de $r_t$ a partir del Modelo 7 para 10 días . . . . .	138
5.1	Correlaciones cruzadas entre $X_{1t}$ y $X_{2t}$ . . . . .	144
5.2	Correlaciones cruzadas entre $X_{1t}$ y $X_{3t}$ . . . . .	144
5.3	Correlaciones cruzadas entre $X_{2t}$ y $X_{3t}$ . . . . .	145
5.4	Gráfico de las variaciones trimestrales de las series PIB, CI y DFI . . . . .	160
5.5	Especificación de un modelo VAR en EViews . . . . .	162
5.6	Criterio gráfico de estabilidad para el VAR(1) estimado . . . . .	163
5.7	Comparación de las predicciones VAR y UNIVARIANTE para $Y_{1t}$ (PIB) . . . . .	169
5.8	Comparación de las predicciones VAR y UNIVARIANTE para $Y_{2t}$ (CI) . . . . .	170
5.9	Comparación de las predicciones VAR y UNIVARIANTE para $Y_{3t}$ (DFI) . . . . .	170
5.10	Respuesta de las variables $Y_{1t}$ , $Y_{2t}$ y $Y_{3t}$ ante un choque unitario de $Y_{1t}$ . . . . .	177

5.11	Respuesta de las variables $Y_{1t}$ , $Y_{2t}$ y $Y_{3t}$ ante un choque unitario de $Y_{2t}$ . . . . .	178
5.12	Correlaciones cruzadas entre $X_{1t}$ y $X_{2t}$ . . . . .	186
5.13	Gráfico de secuencia de las series . . . . .	187
5.14	Criterio de estabilidad para el VAR(1) estimado . . . . .	189
5.15	Comparación de las predicciones VAR y UNIVARIANTE para $X_{1t}$ (IPP) . . . . .	194
5.16	Comparación de las predicciones VAR y UNIVARIANTE para $X_{2t}$ (IAE) . . . . .	194
5.17	Respuesta de las variables $X_{1t}$ y $X_{2t}$ ante un choque unitario de $X_{1t}$ . . . . .	196
5.18	Respuesta de las variables $X_{1t}$ y $X_{2t}$ ante un choque unitario de $X_{2t}$ . . . . .	197
6.1	Las variables $X_{1t}$ y $X_{2t}$ no están cointegradas . . . . .	200
6.2	Las variables $X_{1t}$ y $X_{2t}$ están cointegradas . . . . .	200
6.3	Series consideradas en el ejemplo 6.1 . . . . .	202
6.4	Series consideradas en el ejemplo . . . . .	209
6.5	Prueba de cointegración de Johansen . . . . .	210
6.6	Predicción para $X_{1t}$ . . . . .	226
6.7	Predicción para $X_{2t}$ . . . . .	227
6.8	Predicción para $X_{3t}$ . . . . .	227
6.9	Comparación de las predicciones para $X_{1t}$ entre el MCE y el modelo univariante. . . . .	228
6.10	Comparación de las predicciones para $X_{2t}$ entre el MCE y el modelo univariante. . . . .	229
6.11	Comparación de las predicciones para $X_{3t}$ entre el MCE y el modelo univariante. . . . .	229
6.12	Restricciones al MCE para la prueba de exogeneidad débil . . . . .	231
6.13	Estimación del MCE con restricciones . . . . .	232

# Índice de tablas

3.1	Cálculos para el caso condicionado . . . . .	70
3.2	Cálculos para el caso no condicionado . . . . .	71
3.3	Resumen estadístico para el modelo $ARIMA(2, 1, 2)$ de la SIB . . . . .	72
3.4	Resumen estadístico para el modelo $ARIMA(2, 1, 2)$ de la SIB . . . . .	74
3.5	Resumen estadístico para el modelo $ARIMA(2,1,1)$ de la SIB . . . . .	74
3.6	Resumen estadístico para el modelo $ARIMA(1, 1, 1)$ de la SIB . . . . .	75
3.7	Resumen estadístico para el modelo $ARIMA(1, 1, 1)$ de la SIB sin constante . . . . .	75
3.8	Predictores y EMC de un modelo $ARIMA(0,0,2)$ . . . . .	85
3.9	Predictores y EMC de una marcha aleatoria . . . . .	85
3.10	Predictores y EMC de un modelo $ARIMA(1, 1, 0)$ . . . . .	86
3.11	Predictores y EMC de un modelo $ARIMA(1,0,1)$ . . . . .	87
3.12	Información estadística para la prueba ADF de la SIB . . . . .	95
3.13	Información estadística para la prueba ADF de la SIB diferenciada . . . . .	95
3.14	Información estadística del Modelo 1 . . . . .	100
3.15	Información estadística del Modelo 2 . . . . .	101
3.16	Información estadística del Modelo 3 para la SVM . . . . .	102
3.17	Prueba de Chow para las predicciones. . . . .	103
3.18	Compración de modelos . . . . .	104
4.1	Información sobre los coeficientes del Modelo 4 para la SVM . . . . .	115
4.2	Información estadística para el Modelo 4-ARCH(1) para la SVM . . . . .	116
4.3	Información estadística para el Modelo 5-ARCH(1) para la SVM . . . . .	117
4.4	Información estadística para el Modelo 6-ARCH(1) para la SVM . . . . .	119
4.5	Modelo7-EGARCH(1,1) con orden de asimetría 1 . . . . .	122
4.6	Prueba de Dickey - Fuller para $r_t$ . . . . .	123
4.7	Resumen de estadísticas del Modelo 1 para $r_t$ . . . . .	125
4.8	Resumen estadístico del Modelo 2 para $r_t$ . . . . .	126
4.9	Resumen estadístico del Modelo 3 para $r_t$ . . . . .	127
4.10	Resumen estadístico del Modelo 4 para $r_t$ . . . . .	129
4.11	Resumen estadístico del Modelo 5 para $r_t$ . . . . .	130
4.12	Resumen de estadísticas del Modelo 5-EGARCH(1,0) para $r_t$ . . . . .	133
4.13	Resumen de estadísticas del Modelo 6 para $r_t$ . . . . .	135
4.14	Resumen de estadísticas del Modelo 7 para $r_t$ . . . . .	135
5.1	Resumen de estadísticas y matrices de correlación cruzada para $X_{1t}$ , $X_{2t}$ y $X_{3t}$ . . . . .	143
5.2	Prueba DFA para $Y_{1t}$ . . . . .	160



5.3	Prueba DFA para $Y_{2t}$ . . . . .	160
5.4	Prueba DFA para $Y_{3t}$ . . . . .	161
5.5	Criterios para escoger el retardo del VAR . . . . .	161
5.6	Prueba para autocorrelación <i>Pormanteau</i> . . . . .	164
5.7	Prueba para autocorrelación <i>Pormanteau</i> . . . . .	165
5.8	Prueba LM . . . . .	166
5.9	Prueba de Normalidad de los residuos . . . . .	166
5.10	Error Medio Cuadrático estimado para los modelos VAR y univariante . . . . .	171
5.11	Prueba de causalidad de Granger . . . . .	175
5.12	Respuesta de las variables $Y_{1t}$ , $Y_{2t}$ y $Y_{3t}$ ante un choque unitario de $Y_{1t}$ . . . . .	177
5.13	Respuesta de las variables $Y_{1t}$ , $Y_{2t}$ y $Y_{3t}$ ante un choque unitario de $Y_{2t}$ . . . . .	178
5.14	Respuesta de las variables $Y_{1t}$ , $Y_{2t}$ y $Y_{3t}$ ante un choque unitario de $Y_{3t}$ . . . . .	179
5.15	Descomposición hipotética de choques . . . . .	182
5.16	Otra descomposición hipotética de choques . . . . .	183
5.17	Descomposición de la Varianza (Orden de Cholesky $Y_3 Y_2 Y_1$ ) . . . . .	184
5.18	Resumen de estadísticas y matrices de correlación cruzada para $X_{1t}$ y $X_{2t}$ . . . . .	185
5.19	Prueba DFA para $X_{1t}$ . . . . .	187
5.20	Prueba DFA para $X_{2t}$ . . . . .	187
5.21	Criterios para escoger el retardo del VAR . . . . .	188
5.22	Prueba de autocorrelación <i>Pormanteau</i> . . . . .	190
5.23	Prueba LM . . . . .	191
5.24	Error Medio Cuadrático estimado para los modelos VAR y UNIVARIANTE . . . . .	195
5.25	Prueba de causalidad de Granger . . . . .	195
5.26	Respuesta de las variables $X_{1t}$ y $X_{2t}$ ante un choque unitario de $X_{1t}$ . . . . .	196
5.27	Respuesta de las variables $X_{1t}$ y $X_{2t}$ ante un choque unitario de $X_{2t}$ . . . . .	197
5.28	Descomposición de la Varianza (Orden de Cholesky $X_1 X_2$ ) . . . . .	198
6.1	Prueba de raíces unitarias para $X_{1t}$ . . . . .	203
6.2	Prueba de raíces unitarias para $X_{2t}$ . . . . .	203
6.3	Prueba de raíces unitarias para $X_{3t}$ . . . . .	203
6.4	Prueba de raíces unitarias para $X_{1t}$ en primera diferencia . . . . .	203
6.5	Prueba de raíces unitarias para $X_{2t}$ en primera diferencia . . . . .	203
6.6	Prueba de raíces unitarias para $X_{3t}$ en primera diferencia . . . . .	204
6.7	Elección del retardo del VAR . . . . .	209
6.8	Resumen de la prueba de cointegración de Johansen para VAR(4) . . . . .	210
6.9	Modelo 1 . . . . .	215
6.10	Modelo 2 . . . . .	216
6.11	Modelo 3 . . . . .	217
6.12	Modelo 4 . . . . .	218
6.13	Prueba LM para el Modelo 1 . . . . .	221
6.14	Prueba LM para el Modelo 2 . . . . .	221
6.15	Prueba LM para el Modelo 3 . . . . .	222
6.16	Prueba LM para el Modelo 4 . . . . .	222
6.17	Prueba <i>Portmanteau</i> para el Modelo 3 . . . . .	223
6.18	Prueba <i>Portmanteau</i> para el Modelo 4 . . . . .	224
6.19	Prueba de Jarque-Bera para el Modelo 3 . . . . .	224
6.20	Prueba de Jarque-Bera para el Modelo 4 . . . . .	225

---

6.21	Predicciones para las tres series utilizando el MCE . . . . .	225
6.22	Error cuadrático medio de los modelos univariantes y el EMC para las variables modeladas . . . . .	228
6.23	Restricciones de cointegración . . . . .	230
6.24	Modelo 4 con la restricción $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ . . . . .	233
D.1	Series trimestrales de Colombia. <b>Fuente:</b> DANE, Bogotá-Colombia . . . . .	266
D.2	Series mensuales del Ecuador <b>Fuente:</b> INEC . . . . .	268

# Notaciones

- $E(\cdot)$  : Esperanza matemática de una variable aleatoria.
- $V(\cdot)$  : Varianza de una variable aleatoria.
- $\text{Cov}(\cdot, \cdot)$  : Covarianza de dos variables aleatorias.
- $N(\mu, \sigma^2)$  : Distribución normal con media  $\mu$  y varianza  $\sigma^2$ .
- $\hat{\cdot}$  : Denota un estimador del parámetro estadístico que se encuentra bajo el símbolo.
- $c$  : De manera general, representa a una constante numérica.
- i.i.d : Representa a la frase: independientes e idénticamente distribuidas.
- i.i.d (0,1) : Variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con esperanza matemática 0 y varianza 1.
- $\gamma(\ell)$  : Función de autocovarianza de orden  $\ell$ .
- $\rho(\ell)$  : Función de autocorrelación de orden  $\ell$ .
- $r(\ell)$  : Función de autocorrelación parcial de orden  $\ell$ .
- $1_A$  : Función indicatriz sobre el conjunto  $A$ .
- $L_c^2(\Omega)$  : Espacio de variables aleatorias de  $\Omega$  en  $C$ , de cuadrado integrable.
- $L_c^2(E)$  : Espacio de funciones medibles de  $E$  en  $C$ , de cuadrado integrable.
- $\Sigma$  : Matriz de varianzas - covarianzas
- $\Sigma_u$  : Matriz de varianzas – covarianzas residuales
- $\therefore$  : Significa: por tanto
- v.a. : Variable aleatoria
- p.e.s.o. : Proceso estacionario de segundo orden
- e.v. : Espacio vectorial
- r.b. : Ruido blanco
- m.c. : Media cuadrática
- d.e. : Débilmente estacionario
- $\perp$  : es ortogonal a
- $\mathbb{R}$  : Conjunto de números reales

- $\mathbb{C}$  : Conjunto de números complejos
- $\mathbb{R}^k$  : Conjunto de números reales de dimensión  $k$
- $\mathbb{C}^k$  : Conjunto de números complejos de dimensión  $k$
- $\mathbb{Z}$  : Conjunto de números enteros
- $|| > 1$  : Valor absoluto mayor a uno